

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 giugno 1910.

P. BLASERNA, Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra un'estensione di un teorema di Lindelöf nel calcolo delle variazioni.* Nota del Socio LUIGI BIANCHI.

1. Nel problema della superficie minima di rotazione, un arco AB di catenaria

$$y = m \cosh \frac{x}{m}$$

ha effettivamente la proprietà di minimo allora ed allora soltanto quando le tangenti negli estremi A, B si incontrano prima della direttrice $y = 0$ (asse di rotazione).

Il caso in cui le tangenti in A, B vanno ad incontrarsi precisamente sulla direttrice è particolarmente notevole. In tal caso gli estremi A, B sono coniugati nel senso di Jacobi e sussiste l'elegante proprietà scoperta da Lindelöf: *L'area generata dalla rotazione dell'arco AB di catenaria è eguale alla somma delle superficie laterali dei due coni generati dai tratti rettilinei AC, BC delle tangenti in A, B fino all'incontro in C colla direttrice.*

Non so che sia stata osservata la generalizzazione seguente del teorema di Lindelöf.

Le catenarie di direttrice $y = 0$ sono le curve estremali per l'integrale a limiti fissi

$$J = \int y \, ds$$

e il teorema di Lindelöf, nell'ipotesi che A, B siano coniugati, si scrive colla formola

$$(1) \quad J_{AB} = J_{AC} + J_{BC},$$

l'integrale del primo membro essendo esteso all'arco AB di estremale e quelli del secondo ai due tratti di tangenti AC, BC. La generalizzazione indicata consiste in ciò che: *la formola (1), e quindi il teorema di Lindelöf, sussiste ancora per le curve estremali dell'integrale*

$$J = \int y^p ds,$$

ove l'esponente p si supponga soltanto positivo. Per es. per $p = \frac{1}{2}$ questo integrale rappresenta, a meno di un fattore costante, l'azione di Maupertuis relativa alla forza di gravità e il teorema di Lindelöf dice che l'azione nel moto di un punto pesante per un arco parabolico AB, ad estremi coniugati, è eguale alla somma delle azioni pei tratti rettilinei tangenti AC, BC, che si incontrano in C sulla direttrice della parabola.

Lo stesso teorema generalizzato di Lindelöf può ricevere, come si vedrà, una interpretazione geometrica notevole per gli archi geodetici tracciati sulle superficie evolute di quelle superficie per le quali il rapporto dei raggi principali di curvatura è una costante negativa.

2. Ricordo dapprima alcune proprietà delle curve estremali per l'integrale

$$(2) \quad J = \int_{x_1}^{x_2} y^p \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

con esponente p positivo, sviluppate da pagina 127 a 130 del recente libro di Hadamard ⁽¹⁾, aggiungendovi alcune considerazioni complementari.

L'equazione differenziale d'Eulero

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0,$$

per la funzione $f = y^p \sqrt{1 + y'^2}$ sotto il segno integrale in (2), si scrive

$$(3) \quad \frac{yy''}{1 + y'^2} = p,$$

e, essendo y'' positiva con y , la curva estremale volge costantemente la convessità verso la direttrice $y = 0$. Scrivendo la (3) così

$$\frac{y\sqrt{1 + y'^2}}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = p,$$

⁽¹⁾ *Leçons sur le calcul des variations*, tome I, Paris, Hermann (1910).

si vede che: *Le curve estremali del nostro problema sono quelle per le quali la normale ed il raggio di curvatura sono rivolti in verso contrario ed hanno il rapporto costante* $= p$.

Facendo rotare queste curve attorno alla direttrice si hanno dunque le superficie di rotazione coi raggi principali di curvatura opposti in segno ed in rapporto costante. Ne risulta anche subito che la doppia infinità di estremali si ottiene da una curva estrema fissata combinando una traslazione nel senso della direttrice con una omotetia col centro su questa retta.

Dall'integrale primo

$$y^p \frac{dx}{ds} = m^p \quad (m \text{ costante})$$

dell'equazione (3) d'Eulero si trae per l'equazione in termini finiti della estrema

$$x = c \pm \int_m^y \frac{m^p dy}{\sqrt{y^{2p} - m^{2p}}}.$$

Essendo qui p positivo, ogni punto della curva (escluso il vertice) ha uno ed un solo punto coniugato; due punti coniugati sono da parti opposte del vertice e le tangenti in essi si segano sulla direttrice (Hadamard, loc. cit., e Bolza, *Variationsrechnung*, pag. 80).

3. Per dimostrare il teorema generalizzato di Lindelöf, cioè la formola (1), scriviamo per semplicità l'equazione della curva estrema

$$(4) \quad x = \pm \int_m^y \frac{m^p dy}{\sqrt{y^{2p} - m^{2p}}},$$

avendo fatto passare l'asse delle y pel vertice $V \equiv (0, m)$. Siano

$$A \equiv (x_1, y_1) \quad , \quad B \equiv (x_2, y_2)$$

due punti coniugati sull'estrema (4), onde saranno le ascisse x_1, x_2 di segno contrario poniamo $x_1 < 0, x_2 > 0$, e si avrà quindi

$$(5) \quad x_1 = -m^p \int_m^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{y^{2p} - m^{2p}}}, \quad x_2 = m^p \int_m^{y_2} \frac{dy}{\sqrt{y^{2p} - m^{2p}}}.$$

Le tangenti in A, B, di equazioni

$$(6) \quad \begin{cases} y - y_1 = -\frac{1}{m^p} \sqrt{y_1^{2p} - m^{2p}} (x - x_1) \\ y - y_2 = \frac{1}{m^p} \sqrt{y_2^{2p} - m^{2p}} (x - x_2) \end{cases}$$

passano per un medesimo punto $C \equiv (\xi, 0)$ della direttrice e sussistono quindi, per le (4), (5), le formole

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{y_1}{\sqrt{y_1^{2p} - m^{2p}}} - \int_m^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{y^{2p} - m^{2p}}} = \frac{\xi}{m^p}, \\ \frac{y_2}{\sqrt{y_2^{2p} - m^{2p}}} - \int_m^{y_2} \frac{dy}{\sqrt{y^{2p} - m^{2p}}} = -\frac{\xi}{m^p}. \end{cases}$$

Per l'estremale (4) l'elemento d'arco è

$$ds = \frac{y^p dy}{\sqrt{y^{2p} - m^{2p}}}$$

e l'integrale fondamentale J prende la forma

$$J = \int \frac{y^{2p} dy}{\sqrt{y^{2p} - m^{2p}}};$$

avremo quindi

$$(8) \quad J_{AB} = \int_m^{y_1} \frac{y^{2p} dy}{\sqrt{y^{2p} - m^{2p}}} + \int_m^{y_2} \frac{y^{2p} dy}{\sqrt{y^{2p} - m^{2p}}}.$$

Calcoliamo ora i valori degli integrali

$$J_{AC}, J_{BC},$$

estesi ai tratti rettilinei di tangenti AC, BC . Lungo il tratto AC abbiamo per es. per la (7)

$$ds = \frac{y_1^p}{\sqrt{y_1^{2p} - m^{2p}}} dy,$$

e quindi

$$J_{AC} = \frac{y_1^p}{\sqrt{y_1^{2p} - m^{2p}}} \int_m^{y_1} y^p dy = \frac{1}{p+1} \frac{y_1^{2p+1}}{\sqrt{y_1^{2p} - m^{2p}}},$$

e similmente

$$J_{BC} = \frac{1}{p+1} \frac{y_2^{2p+1}}{\sqrt{y_2^{2p} - m^{2p}}}.$$

L'eguaglianza (1) è contenuta nella formola

$$(9) \quad (p+1) \int_m^{y_1} \frac{y^{2p} dy}{\sqrt{y^{2p} - m^{2p}}} + (p+1) \int_m^{y_2} \frac{y^{2p} dy}{\sqrt{y^{2p} - m^{2p}}} = \\ = \frac{y_1^{2p+1}}{\sqrt{y_1^{2p} - m^{2p}}} + \frac{y_2^{2p+1}}{\sqrt{y_2^{2p} - m^{2p}}},$$

che dobbiamo dunque verificare.

Differenziando $y\sqrt{y^{2p}-m^{2p}}$ abbiamo

$$d(y\sqrt{y^{2p}-m^{2p}}) = \frac{(p+1)y^{2p}-m^{2p}}{\sqrt{y^{2p}-m^{2p}}} dy,$$

e integrando da m ad y_1 , risulta l'identità

$$\int_m^{y_1} \frac{(p+1)y^{2p}-m^{2p}}{\sqrt{y^{2p}-m^{2p}}} dy = y_1\sqrt{y_1^{2p}-m^{2p}} = \frac{y_1^{2p+1}-m^{2p}y_1}{\sqrt{y_1^{2p}-m^{2p}}},$$

che possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \frac{y_1^{2p+1}}{\sqrt{y_1^{2p}-m^{2p}}} - (p+1) \int_m^{y_1} \frac{y^{2p} dy}{\sqrt{y^{2p}-m^{2p}}} &= \\ &= m^{2p} \left\{ \frac{y_1}{\sqrt{y_1^{2p}-m^{2p}}} - \int_m^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{y^{2p}-m^{2p}}} \right\}. \end{aligned}$$

Sommando questa coll'identità analoga in y_2

$$\begin{aligned} \frac{y_2^{2p+1}}{\sqrt{y_2^{2p}-m^{2p}}} - (p+1) \int_m^{y_2} \frac{y^{2p} dy}{\sqrt{y^{2p}-m^{2p}}} &= \\ &= m^{2p} \left\{ \frac{y_2}{\sqrt{y_2^{2p}-m^{2p}}} - \int_m^{y_2} \frac{dy}{\sqrt{y^{2p}-m^{2p}}} \right\}, \end{aligned}$$

ed osservando che, a causa delle (7), i secondi membri sono eguali e di segno contrario, si ottiene appunto la (9). Il teorema generalizzato di Lindelöf è così dimostrato.

4. Si può riguardare l'elemento d'integrale (2) come elemento lineare ds di una molteplicità a due dimensioni definita da

$$(10) \quad ds^2 = y^{2p}(dx^2 + dy^2),$$

ed il problema di minimizzare l'integrale J corrisponde allora a ricercare le linee geodetiche in questa molteplicità.

È notevole che le superficie dello spazio ordinario alle quali appartiene l'elemento lineare (10) non sono altro, come ora vedremo, che le superficie generate dalla rotazione delle evolute delle nostre curve estremali attorno alla direttrice. In generale il ds^2 dato dalla (10) appartiene (secondo il teorema di Weingarten) alle evolute di quelle superficie i cui raggi principali di curvatura sono in rapporto costante negativo.

Ma per dare la nuova interpretazione geometrica del teorema generalizzato di Lindelöf conviene dapprima prescindere da ogni particolare forma di superficie realizzante l'elemento lineare (10) e riguardare, al modo di Riemann-Beltrami, la molteplicità generale a due dimensioni definita, in

tutta la sua estensione, dalla (10) stessa. Allora il piano xy non è che un piano rappresentativo per la nostra molteplicità, che su di esso viene colla (10) rappresentata in modo *conforme*. Le curve estremali sono le immagini delle linee geodetiche, mentre le rette del piano xy vengono a rappresentare le *lossodromiche* della molteplicità, cioè le traiettorie isogonali dei meridiani $x = \text{costante}$.

Dopo queste osservazioni, ove si consideri sulla molteplicità (10) un arco geodetico AB e i cui estremi A, B siano coniugati nel senso di Jacobi (¹), si può enunciare il teorema di Lindelöf generalizzato sotto la forma seguente:

Le due lossodromiche tangenti all'arco geodetico AB nei due estremi coniugati A, B si incontrano in un punto C, e l'arco geodetico AB è eguale alla somma dei due archi lossodromici AC, BC.

Ritornando ora alla curva estremale (4), si ha pel suo raggio ϱ di curvatura

$$\varrho = \frac{y^{p+1}}{m^p}$$

e per l'ordinata r del centro di curvatura

$$r = y + \frac{1 + y'^2}{y''} = \frac{p+1}{p} y.$$

Poichè l'arco u della evoluta è precisamente ϱ , si vede che r è proporzionale alla potenza $\frac{1}{p+1}$ dell'arco, e quindi se questa evoluta rota attorno alla direttrice, l'elemento lineare della superficie di rotazione generata sarà

$$(11) \quad ds^2 = du^2 + u^{\frac{2}{p+1}} dv^2.$$

Se qui si opera un cangiamento di parametri u, v ponendo

$$u = \frac{p}{p+1} y^{\frac{p+1}{p}}, \quad v = \frac{p+1}{p} x,$$

la (11) si converte in

$$ds^2 = y^{\frac{2}{p}} (dx^2 + dy^2)$$

che è la (10) stessa, cangiato p in $\frac{1}{p}$ (²).

(¹) Si noti che la curvatura K della molteplicità (10) è data da

$$K = \frac{p}{y^{\frac{p}{p+1}}},$$

onde è essenzialmente positiva.

(²) La stessa cosa risulta dall'applicare le formole generali del teorema di Wein-

L'elemento lineare (10) appartiene dunque in effetto alle superficie di rotazione che hanno per meridiani le evolute delle nostre curve estremali e per asse di rotazione la direttrice. Su queste superficie si presenta però un parallelo cuspidale, corrispondente alla cuspide della evoluta o al vertice della curva estremale. La rappresentazione sopra una tale superficie della metrica definita dalla (10) resta per ciò incompleta e il teorema di Lindelöf sopra enunciato ha qui un significato soltanto ove si consideri la differenza fra l'arco geodetico AB e gli archi lossodromici tangenti terminati al parallelo cuspidale; questa differenza, sempre positiva, tende a zero quando, deformando la superficie di rotazione, si faccia tendere a zero il raggio del parallelo di regresso.

Matematica. — *Sopra una proprietà caratteristica delle superficie rigate applicabili sul catenoide.* Nota del Socio L. BIANCHI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Biologia. — *Gli ovariole delle fillossere.* Nota (24^a) del Socio B. GRASSI.

Riassumo qui brevemente le mie ricerche intorno agli ovariole della fillossera della vite, rimandando per la letteratura dell'argomento all'opera in corso di stampa, nella quale sono riunite tutte le ricerche mie e dei miei scolari sulle *Phylloxerinae*, corredate delle notizie storiche raccolte con la massima scrupolosità.

Allo studio degli ovariole sono stato condotto da quelle esperienze, le quali ci avevano dato la certezza che nella fillossera della vite una stessa forma può diventare alata sessupara ovvero attera virginopara, ovvero ninfale, ordinariamente virginopara, eccezionalmente sessupara. I risultati anche in queste esperienze, come sempre, erano state controllate (ciò che non solevasi fare nello studio degli Afidini) da allevamenti in capsula di Petri seguiti giorno per giorno; il rigore con cui essi furono condotti è dimostrato già dal fatto che le mute delle *Chermesidae* da tutti ritenute tre vennero dimostrate essere invece in numero di quattro dalla dott. Foà, che con esattezza e pazienza fece e portò a termine questa parte del lavoro.

garten alle superficie W coi raggi di curvatura legati dalla relazione $\frac{r_2}{r_1} = -\frac{1}{p}$, e si vede altresì che l'elemento lineare (10) appartiene alla superficie complementare di quella generata dalla evoluta.

Dal momento che una medesima larva può diventare virginopara o ses-supara, e cioè, può essere portata a fare uova di virginopara (femmina) invece di uova di maschio, si deve ammettere la possibilità dell'inversione del sesso. Ammessa l'inversione, l'interpretazione che si può dare a questo fenomeno non è così semplice come si potrebbe credere a tutta prima. Infatti io ebbi già a pubblicare che l'ottenere un maschio ovvero una femmina (avente o no bisogno di essere fecondata) può essere subordinato allo sviluppo di certe uova comitato a soppressione di certe altre, ovvero alla determinazione per l'uno o per l'altro sesso di un medesimo uovo, capace di dar luogo tanto ad un maschio quanto ad una femmina; soltanto in questo secondo caso si dovrebbe parlare di una vera e propria inversione di sesso.

Per tentare di decidere a quale delle due interpretazioni dobbiamo atternerci nel nostro caso speciale, ho intrapreso una serie di osservazioni sugli ovariole della fillossera della vite, in parte da solo, ed in parte colla mia assistente dott. Foà.

Nelle fillossere neonate (gallecole figlie delle fondatrici) abbiamo trovato invece di distinti ovariole, due listerelle longitudinali ripartite per il trasverso in tante porzioncine; nelle prime larve nate da qualche tempo, anche se ancora non fissate, si distinguono già gli ovariole, di cui due-tre anteriori leggermente più sviluppati. In queste condizioni si trovano gli ovariole anche nelle forme ibernanti prima del risveglio. Essi appaiono alquanto cresciuti prima della muta (prime larve gallecole già fissatesi). Il numero degli ovariole è per lo più di 10 paia circa (ossia 10 a destra e 10 a sinistra) nelle ibernanti; può arrivare fino a 25-30 nelle prime larve delle fondatrici e gareggiare con questo numero, mantenendosi però un po' inferiore, anche nelle prime larve figlie delle fondatrici neogallecole gallecole: sulle neogallecole radicecole non abbiamo ancora fatto osservazioni).

Noi non abbiamo notato diminuzione di numero degli ovariole fino agli stadi avanzati. Nelle ibernanti sulle radici grosse si riscontra lo stesso numero di ovariole che nelle ibernanti sulle nodosità (viti americane); in queste gli ovariole maturano quasi tutti; in quelle ne maturano appena 4-6-10 in tutto, si deve perciò ammettere che parecchi ovariole degenerino verso l'ultima muta. Limitato è anche il numero degli ovariole che maturano nelle fondatrici (gallecole) sviluppatesi sulle viti europee. Nelle figlie delle ibernanti si può sviluppare una gran parte delle dieci paia circa di ovariole della prima larva. Così press'a poco si comportano anche le ninfali virginopare. È certo che tutt'e dieci queste paia di ovariole della prima larva possono svilupparsi interamente nelle attere virginopare.

Nella prenifa noi ritroviamo ancora dieci paia circa di ovariole come nelle prime larve neoradicecole. Lo stesso reperto si ha nella ninfa giovane (occhi composti con poche faccette): gli ovariole anteriori, come sempre, sono alquanto più sviluppati. Più tardi avviene la scomparsa di sei-sette paia di

ovarioli posteriori, ossia restano soltanto gli anteriori, cioè i più grandi e questi vanno avanti a svilupparsi e possono perfino in certi casi già avviarsi alle dimensioni definitive prima che la ninfa sia diventata alata ⁽¹⁾.

In rapporto dunque col fatto che l'alata sessupara fa pochissime uova notiamo la scomparsa degli ovarioli posteriori. Questi ovarioli devono venire riassorbiti rapidamente. Contemporaneamente avviene un altro fenomeno. Com'è noto, nel lacunoma della fillossera si trovano cellule grandi col protoplasma più o meno granuloso interpretate come pseudovitello dal Krassilstschik e tali ritenute anche dal Dreyfus ed altre cellule che non raggiungono mai le massime dimensioni delle prime, che il Dreyfus denomina *x* e che appartengono alla poco ben nota categoria degli enociti (forse esistono forme di passaggio da queste alle cellule pseudovitelline) ⁽²⁾. Le cellule granulose invece di sempre più ingrandire, come accade nelle virginopare attere radicecole e gallecole, nelle ninfe impiccoliscono e finiscono per scomparire in gran parte: anche quelle *x* diminuiscono di numero.

I qui descritti fenomeni risaltano benissimo osservando una ninfa in cui gli ovarioli siano già ridotti a pochi, ovvero confrontando le sezioni di un'alata con quelle di una radicecola o gallecola adulta. Come essi si svolgano, lo ignoriamo ancora.

Noi possiamo fino ad un certo punto distinguere tre tappe differenti alle quali corrispondono differenti gradi di sviluppo degli occhi composti e della muscolatura alare delle ninfe:

1) ninfe più giovani con tutti gli ovarioli, senza un uovo ben distinto, con cellule pseudovitelline e cellule *x* nell'addome;

2) ninfe meno giovani con tutti gli ovarioli, di cui gli anteriori presentano un uovo ben distinto; del resto per le cellule speciali, come le ninfe 1);

3) ninfe prossime a diventare alate con due-tre paia di ovarioli ognuno con due uova, uno più sviluppato dell'altro e più o meno grosso, senza cellule pseudovitelline e con un numero piccolo di cellule *x*.

Non sono rare però le eccezioni, soprattutto le eterocronie, nello svolgimento dei suddetti fenomeni.

È certo che diventano sessupari quegli ovarioli che per primi maturerebbero nelle virginopare attere e anche nelle ninfali.

Se ora studiamo minutamente gli ovarioli, vediamo che ad un certo momento (per es. nella preninfa) diventano evidentissime:

1) le cellule nutritizie, cuneiformi o quasi col nucleo, che si colora per lo più intensamente;

⁽¹⁾ Nelle ninfe, pronte a mutare, delle virginopare alate della *Ph. quercus* notasi già un certo numero di uova aventi dimensioni definitive.

⁽²⁾ Nelle cellule pseudovitelline vi sono (in varie fillossere della quercia e forse anche in quelle della vite) certi corpuscoli che ritengo parassiti, fenomeno che trova riscontro negli altri omotteri (Šule).

2) le cellule epiteliali dei follicoli e dei condottini di ciascun ovario; 3) gli oociti (alla parte di mezzo dell'ovario) riconoscibili dalla forma tondeggianti e dal nucleo che in generale poco intensamente si colora.

Uno di questi oociti precocemente presentasi un po' più grande degli altri e cresce notevolmente (uovo). In ogni ovario si formano parecchi oociti tanto nelle preninfe, quanto nelle premadri e di essi soltanto due in generale vanno avanti a svilupparsi nella ninfa e nell'alata (uno matura e l'altro no), quattro e più invece nella attera. Data questa complicazione di cose sorge il dubbio che accada nella *Phylloxera* qualcosa di simile a quanto ammette il Reuter nel *Pediculopsis* che, cioè, le uova d'una madre siano almeno di due sorta e quelle di una sorta sola vadano avanti a svilupparsi, escludendo così il vero cambiamento di sesso. Io non posso attualmente approfondire l'interessante questione, ma spero di poter affidare tal compito a qualche scolaro (1).

È importante notare che dopo la seconda muta (quella precedente la muta che produce le ninfe) si riconoscono per caratteri vari le forme che in generale diventano ninfe (preninfe) (Foà). In questo stadio noi non sapremmo però coi soli caratteri degli ovarii distinguere le future sessupare dalle future virginopare: del resto già dagli esperimenti si poteva indubbiamente arguire che non doveva esservi differenza, potendo le preninfe diventare anche ninfali virginopare (Foà).

Astrofisica — Osservazioni astrofisiche della cometa Halley, eseguite nell'Osservatorio di Catania. Nota preliminare del Corrispondente A. RICCÒ.

Matematica. — Sugli ordini degli infiniti. Nota del Corrispondente G. PEANO.

Chimica. — Sopra la decomposizione di alcuni sali d'argento. Nota del Corrispondente A. ANGELI e di L. ALESSANDRI.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

(1) Quanto alle sessuate è d'uopo notare che noi abbiamo sempre riscontrato che si sviluppano due ovarii e non molti, come negli afidi: uno dei due va distrutto costantemente.

Geodesia. — *Determinazioni complementari di gravità in Sicilia nel 1907.* Nota del Corrispondente A. VENTURI.

Colle precedenti quattro campagne in Sicilia, e tenendo presenti le determinazioni del chmo prof. Riccò sulla costa orientale, si può affermare di aver stabilito, nell'Isola, una rete gravimetrica di sufficiente entità, per rendere facile un'idea sintetica della distribuzione delle anomalie su tutto il territorio esplorato. Ma saltava agli occhi una diversità di addensamento dei punti di stazione, confrontando la regione occidentale dell'Isola col resto di essa, e specialmente colla orientale. Le determinazioni costiere, succedentisi generalmente di 40 in 50 chilometri, mostravano un vero vuoto fra Palermo e Trapani: e dentro terra, era troppo largo il triangolo Corleone-Trapani-Mazzara. Mi parve opportuno, per la regolarità della rete, intercalare almeno due altri punti: uno fra Palermo e Trapani, e fu Castellammare del Golfo; l'altro, nel centro del sopradetto triangolo, e fu Salemi. Questo lavoro fu di competenza del solo Istituto Geodetico dell'Università di Palermo.

I metodi e gli stromenti adoperati questa volta, furono sempre i medesimi di tutte le altre campagne; parendomi essenziale costituire un lavoro omogeneo in ogni sua parte, per raggiungere uno scopo, quale è quello che ci proponiamo in ogni ricerca comparativa. Rinvio, pertanto, alle pubblicazioni mie precedenti, sul medesimo soggetto ⁽¹⁾ onde non ripetermi inutilmente.

La stazione fondamentale alla Martorana fu eseguita, soltanto, prima del breve viaggio; poichè, essendo questo durato appena una settimana, non parve probabile che i pendoli avessero variato lunghezza in sì breve termine, specialmente avendo le precedenti campagne mostrato come oramai sembri che i detti pendoli abbiano raggiunto uno stato di stabilità molecolare definitiva, ragione facendo delle inevitabili incertezze dovute ai piccoli errori residuali che non possono da nessuna ricerca sperimentale esser banditi ⁽²⁾.

A Castellammare, la stazione fu fatta in una casetta terrena del commendatore Rocco Foderà, all'ingresso del paese, in luogo assolutamente riparato e solitario: a Salemi si stazionò nel magnifico locale dell'ex Collegio dei Gesuiti, ora palazzo delle Scuole: si operò in una sala terrena.

⁽¹⁾ V. Atti della R. Accademia di Palermo, vol. IV, serie III, 1901. Questi Rendiconti, anno 1905, vol. XIV, anno 1907, vol. XVI; anno 1909, vol. XVII.

⁽²⁾ Questi Rendiconti, anno 1906, vol. XV, 2° sem., serie 5ª, fasc. II, pag. 664, seduta 2 dic. 1906.

Debbo i miei pubblici ringraziamenti al comm. Foderà suddetto, e al cñmo prof. Enrico Lugaro del R. Ginnasio di Castellammare; come pure al Sindaco di Salemi, cav. Giuseppe Lampiasi, al prof. Angelo Vito ed al maestro sig. La Rocca della stessa città, per avermi, in tutti i modi e colla massima premura, agevolato efficacemente nell'impianto delle stazioni.

Ricordo, in ultimo, per un eccesso di chiarezza, che l'apparato di Sternek è sempre usato colla mensola a muro, e con tutte le precauzioni necessarie a garantire la sua immobilità: che anche questa volta il tempo è stato preso coi due metodi diversi, verticale della polare, e primo verticale; cosicchè si hanno, come sempre, due determinazioni indipendenti dell'andamento orario del solito pendolo Hawelk per ciascun giorno di esperimento.

Nei quadri seguenti si trovano registrati, dapprima, gli elementi che fissano la posizione di ciascuna stazione, le longitudini essendo tutte contate da Monte Mario. Seguono, poi, i dati relativi all'andamento orario del pendolo motore Hawelk, secondo i due metodi sopra menzionati. Infine compariscono i dati di osservazione delle misure gravimetriche propriamente dette: durata di una coincidenza, nella colonna intestata *c*: temperatura, intestata con *t*; pressione atmosferica ridotta a 0°, intestata con *b*: durata della oscillazione corretta per la temperatura, per la densità dell'aria, per l'andamento del pendolo, e ridotta all'arco infinitesimo. Tale colonna è intestata con *s*. L'ampiezza iniziale dell'oscillazione era di 10 parti della scala.

1. Stazione alla Martorana (Palermo).

Latitudine = 38°.06'.55"2 Longitudine = — 1°.54'.32" (da M. Mario).

Altitudine della stazione = 20^m.17.

Densità del suolo = 2.5.

Stati di Hawelk ed andamenti orari, 1907 ⁽¹⁾.

Data siderale	DETERMINAZIONE A		Data siderale	DETERMINAZIONE B		And. or. medio
	Stato assoluto	And. or.		Stato assoluto	And. or.	
Luglio 11,6094	—		Luglio 11,6094	—		
12,5993	^{h m s} + 7.57.17,23	— 0,383	12,5993	^{h m s} + 7.57.16,88	— 0,378	— 0,380
13,6017	08,00		13,6017	07,79		

Error medio del medio andamento orario definitivo: ± 0,0027.

(¹) Nel trasporto dello stato assoluto del regolatore Strasser, su cui veniva determinato il tempo, al pendolo Hawelk, motore dell'apparato delle coincidenze, accadde un incidente al Cronografo, per cui lo stato di Hawelk del giorno 11 non riuscì sicuro.

Osservazioni gravimetriche.

Data civile	Pend.	c	t	b	s	Data civile	Pend.	c	t	b	s
Luglio		^s	^s	^{mm}	^s	Luglio		^s	^s	^{mm}	^s
12,3861	116	38,8588	23,30	763,80	0,5062957	13,3764	116	38,8505	23,50	762,50	0,5062961
12,4188	117	35,0932	23,35	—	70050	13,4077	117	35,0932	23,59	—	70038
12,4487	118	34,1187	23,50	—	72137	13,4362	118	34,1182	23,76	—	72124
12,4785	119	34,2373	23,67	763,20	71867	13,4646	119	34,2367	23,88	762,10	71858
12,6229	119	34,2410	23,55	763,40	71865	13,6201	119	34,2380	23,78	762,20	71859
12,6507	118	34,1088	23,80	—	72144	13,6507	118	34,1050	24,04	—	72141
12,6799	117	35,0810	23,94	—	70051	13,6798	117	35,0802	24,00	—	70049
12,7091	116	38,8320	24,04	762,60	62967	13,7091	116	38,8396	24,02	762,02	62967

RIEPILOGO.

116	117	118	119
^s 0,5062963	^s 0,5070047	^s 0,5072136	^s 0,5071862

2. Stazione a Castellammare del Golfo.

Latitudine = 38°.01'.20". Longitudine = — 0°.25'.33" (da M. Mario).

Altitudine della stazione = 76^m.86.

Densità del suolo = 2.4.

Stati di Hawell ed andamenti orari, 1907.

Data siderale	DETERMINAZIONE A		Data siderale	DETERMINAZIONE B		And. or. medio
	Stato assoluto	And. or.		Stato assoluto	And. or.	
Luglio	^{h m s}		Luglio	^{h m s}		
16,7802	+ 10.37.50,26		16,7878	+ 10.37.49,34		
17,7787	49,73	— ^s 0,022	17,7808	—	^s 0,000	— ^s 0,011
18,7786	49,85	+ 0,005	18,7819	49,85		+ 0,003

Error medio del medio andamento orario definitivo: ± 0°,0030.

Osservazioni gravimetriche.

Data civile	Pend.	c	t	b	s	Data civile	Pend.	c	t	b	s
Luglio		^s	^o	^{mm}	^s	Luglio		^s	^o	^{mm}	^s
17,3883	116	39,0683	24,13	755,50	0,5063076	18,3812	116	39,0982	24,39	754,00	0,5063046
17,4174	117	35,2646	24,38	—	70169	18,4125	117	35,2870	24,70	—	70126
17,4466	119	34,4087	24,53	—	71975	18,4417	118	34,2967	24,97	—	72220
17,4758	118	34,2817	24,67	755,50	72248	18,4646	119	34,4165	25,25	754,10	71944
17,6486	118	34,2965	25,11	755,10	72194	18,6403	119	34,4325	25,67	754,10	71886
17,6778	119	34,4095	25,37	—	71933	18,6688	118	34,2968	25,87	—	72175
17,7056	117	35,2747	25,49	—	70096	18,6959	117	35,2792	25,90	—	70084
17,7348	116	39,0757	25,42	754,80	63013	18,7230	116	39,0755	25,87	754,10	63010

RIEPILOGO.

116	117	118	119
0,5063086	0,5070119	0,5072209	0,5071984

3. Stazione a Salemi.

Latitudine = 37° 49'.00". Longitudine = — 0° 21'.10" (da M. Mario).

Altitudine della stazione = 336^m.42.

Densità del suolo . . . = 2.5.

Stati di Hawelk ed andamenti orari, 1907.

Data siderale	DETERMINAZIONE A		Data siderale	DETERMINAZIONE B		And. or. medio
	Stato assoluto	And. or.		Stato assoluto	And. or.	
Luglio			Luglio			
20,7393	+ 15. ^h 11. ^m 11. ^s 62	— 0,007	20,7393	+ 15. ^h 11. ^m 11. ^s 70	— 0,007	— 0,007
21,6995	11,45	+ 0,007	21,6995	11,43	+ 0,007	+ 0,007
22,7054	11,63		22,7054	11,63		

Error medio del medio andamento orario definitivo: ± 0°.0021.

Osservazioni gravimetriche

Data civile	Pend.	<i>c</i>	<i>t</i>	<i>b</i>	<i>s</i>	Data civile	Pend.	<i>c</i>	<i>t</i>	<i>b</i>	<i>s</i>
Luglio						Luglio					
21,3806	116	38,9892	22,75	723,60	0,5063328	22,3861	116	38,9848	22,59	722,50	0,5063344
21,4153	117	35,2043	22,72	—	70414	22,4181	117	35,2118	22,58	—	70405
21,4438	118	34,2235	22,74	—	72507	22,4487	118	34,2252	22,69	—	72506
21,4723	119	34,3468	22,77	723,70	72237	22,4758	119	34,3493	22,70	722,70	72234
21,6229	119	34,3487	22,74	722,90	72233	22,6368	119	34,3483	22,67	722,30	72239
21,6507	118	34,2215	22,91	—	72503	22,6646	118	34,2148	22,81	—	72523
21,6820	117	35,2007	23,00	—	70407	22,6931	117	35,2060	22,85	—	70404
21,7119	116	38 9800	23,06	722,90	63327	22,7216	116	38,9887	22,94	722,10	63320

RIEPILOGO.

116	117	118	119
0,5063330	0,5070407	0,5072510	0,5072236

Compensazione della durata di oscillazione.

Fu applicato anche questa volta il metodo di compensazione da me proposto ⁽¹⁾ soprattutto per la ricerca dell'error medio a tenersi sopra ciascuna determinazione di gravità, in base a condizioni rigorose. Riporto qui quei elementi del calcolo eseguito dall'assistente dott. Mineo.

Residui di osservazione.

<i>i</i>	<i>w_i</i>	<i>i</i>	<i>w_i</i>
1	— 2,0	4	— 3,2
2	0,0	5	+ 3,0
3	— 2,1	6	+ 5,0

che sono, come tutti i dati che seguono espressi in $1^s \times 10^{-7}$.

Seguono le ausiliarie $w_{r,s}$ (loc. cit., pag. 9): le linee si riferiscono ai primi indici, le colonne ai secondi.

(¹) Venturi, *Sulla compensazione dei risultati, nelle misure di gravità relativa*. Nuovo Cimento, serie IV, 1900, Pisa.

Valori delle $w_{r,s}$.

	1		2
1	— 2,0	1	— 4,0
2	0,0	2	+ 3,1
3	— 2,2	3	+ 4,0

Da queste si dedussero le risolventi v, V (loc. cit., pp. 9-11) da cui dipendono le correzioni delle derivate di oscillazione.

Valori delle v_i, V_i .

i	v_i	V_i	i	v_i	V_i
1	— 2,0	— 4,7	4	— 4,0	— 4,0
2	+ 1,2	+ 4,3	5	+ 5,0	+ 5,0
3	— 1,3	+ 1,6	6	+ 4,3	+ 4,3

Da queste, colle formule apposite (loc. cit., pag. 11) si dedussero le correzioni delle durate di oscillazione dei quattro pendoli, in ciascuna stazione.

*Correzioni delle durate di oscillazione
in unità $1^s \times 10^{-7}$.*

Pend.	Palermo	Castellammare	Salemi
116	+ 0,52	— 1,49	+ 0,97
117	— 4,18	— 2,13	+ 6,31
118	+ 2,46	+ 0,54	— 3,00
119	+ 1,20	+ 3,10	— 4,30
Somma	0,00	+ 0,02	— 0,02

La nullità delle somme è un controllo dei calcoli. Applicando le precedenti correzioni ai valori delle oscillazioni riportati nei riepiloghi di cia-

scuna stazione, si hanno i

Valori corretti delle durate di oscillazione.

Pend.	Palermo	Castellammare	Salemi
116	0,5062964	0,5063035	0,5063331
117	0,5070043	0,5070117	0,5070413
118	0,5072138	0,5072209	0,5072507
119	0,5071863	0,5071937	0,5072232

Come controllo, abbiamo i

Residui delle equazioni di condizione.

	1	2	3	4	5	6
<i>w</i>	+2,0	0,0	+2,0	-0,6	+0,6	-0,4

Colla formula (22), pag. 12, della citata Memoria, fu calcolato l'error medio ε che compete a ciascuna determinazione di *una* durata di oscillazione di ogni pendolo, si trovò

$$\varepsilon = 0^s 0000004.3$$

e l'error medio, E , a temersi sopra ciascun pendolo medio, compensato, il quale, nel caso attuale, è dato dalla formula (loc. cit., pag. 14):

$$E = \varepsilon \sqrt{\frac{1}{2}}$$

risultò

$$E = 0^s,0000003$$

certamente molto piccolo.

Deduzione del valore della gravità a Castellammare e Salemi.

Il valore della gravità a Palermo è quello stabilito dopo il confronto con Padova (¹), cioè:

$$g = 980,086.6 \pm 0,004 \text{ cm}$$

il quale serve di base ai valori da dedursi, delle altre gravità. Basterà usare la nota formula:

$$g_r = g \frac{s_p^2}{s_r^2},$$

(¹) Venturi, *Riassunto dei lavori di collegamento* ecc. Questi Rendiconti, vol. XV, fasc. 11, anno 1906.

ove g_r è la gravità della stazione r^a : s_p, s_r sono le durate di oscillazione di uno stesso pendolo, compensate, e prese da un quadro precedente, a Palermo e alla stazione r^a , rispettivamente. Si ebbero i seguenti risultati, per la località di ciascuna stazione ove furono eseguite le osservazioni:

Castellammare	$g = 980,059^{\text{cm}}$
Salemi	$g = 979,944$

e le relative riduzioni al livello del mare, secondo le altitudini sopra riportate, sono, dicendo g_0 la gravità ridotta al detto livello:

Castellammare	$g - g_0 = 23$
Salemi	$g - g_0 = 103.$

Poi si calcolarono le correzioni dovute alle masse sottostanti alla stazione, e alle masse circostanti alla stessa, colla nota formula:

$$g'' - g_0 = \frac{3}{5} \frac{\theta}{\theta_m} (g - g_0) + \text{riduzione topografica}$$

essendo θ la densità del terreno sopra riportata per ogni stazione, e $\theta_m = 5,6$. Si ebbero, così, i valori:

Castellammare	$g'' - g_0 = 0$
Salemi	$g'' - g_0 = -7$

tutto in millesimi di centimetro. Infine, pel calcolo delle gravità teoriche, γ_0 , fu usata la formula di Helmert del 1901. L'anomalia di gravità è $g'' - \gamma_0$, poichè g'' è la gravità ridotta al mare e liberata dall'azione delle masse sovrastanti all'ellissoide di riferimento. Si ha, in ultimo, il quadro seguente:

Valori della gravità.

STAZIONE	g	g_0	g''	γ_0	Anomalia
	^{cm}	^{cm}	^{cm}	^{cm}	^{cm}
Castellammare. .	980,059	980,082	980,082	980,007	+ 0,075
Salemi	979,944	980,047	980,040	979,990	+ 0,050

L'error medio di questi valori di g è dato, nella citata Memoria, pag. 16, dalla formula:

$$M_g = 27,5 \frac{E}{S},$$

essendo E il precedente error medio, ed S il medio valore delle oscillazioni. Viene, pel caso nostro,

$$M_g = 0^{\text{cm}},001.7$$

molto piccolo.

Riportiamo in quadro complessivo tutti i valori di gravità sinora ottenuti disponendoli per valori decrescenti delle anomalie.

Anno	STAZIONE	g	g_0	g''_0	γ_0	Anomalie
		cm	cm	cm	cm	cm
1899	Ustica . . .	979,144	980,221	980,198	980,067	+ 0,131
1906	Milazzo . . .	980,150	980,152	980,151	980,024	+ 0,127
1905	Vittoria . . .	979,986	980,040	980,023	979,913	+ 0,110
1899	Favignana . .	980,999	980,101	980,101	979,999	+ 0,102
1906	Cefalù . . .	980,095	980,110	980,110	980,009	+ 0,102
1899	Pantelleria .	979,947	980,022	980,003	979,902	+ 0,101
1906	Patti . . .	980,082	980,128	980,118	980,017	+ 0,101
1899	Trapani . . .	980,094	980,095	980,095	979,906	+ 0,089
1906	S. Agata . . .	980,082	980,088	980,089	980,011	+ 0,078
1899	Palermo . .	980,087	980,093	980,092	979,015	+ 0,077
1905						
1907	Castellammare	980,059	980,082	980,082	980,007	+ 0,075
1900	Valverde . .	980,072	980,091	980,086	979,014	+ 0,072
1904	Termini . . .	980,061	980,069	980,068	979,003	+ 0,065
1906	Mistretta . .	979,869	980,153	980,063	979,999	+ 0,064
1904	Corleone . . .	979,898	980,091	980,033	979,977	+ 0,056
1905	Sciacca . . .	979,994	980,019	980,016	979,961	+ 0,055
1907	Salemi . . .	979,944	980,047	980,040	979,990	+ 0,050
1905	Terranova . .	979,963	979,974	979,972	979,923	+ 0,049
1905	Mazzara . . .	980,010	980,014	980,013	979,974	+ 0,039
1906	Petralia . . .	979,789	980,100	980,007	979,988	+ 0,019
1905	Licata . . .	979,934	979,941	979,939	979,927	+ 0,012
1904	Vicaretto . .	979,832	979,999	979,956	979,977	— 0,021
1905	Girgenti . . .	979,851	979,943	979,917	979,944	— 0,027
1904	Castrogiovanni	979,720	979,998	979,935	979,965	— 0,030
1904	Caltanissetta .	979,770	979,942	979,891	979,961	— 0,070

Cristallografia — *Forma cristallina del salicilato di colesterina*. Nota del Corrispondente ETTORE ARTINI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica tecnica. — *Su la radiazione di un'antenna inclinata.*
Nota del Corrispondente ANTONIO GARBASSO.

1. In questi ultimi tempi si è ripreso a discutere sul problema della radiazione emessa da un'antenna inclinata, e si sono enunciate in proposito delle opinioni stranamente discordi.

Non si riesce nemmeno a stabilire se una simile antenna eserciti una maggiore influenza *di fronte* (cioè normalmente al piano verticale che la contiene), oppure di fianco (cioè nel detto piano), a parità di distanza.

Eppure la soluzione del problema è semplice e sicura, e risulta senza ambiguità da un calcolo elementare.

2. Scriviamo le equazioni del campo elettromagnetico, in coordinate cilindriche, sotto la forma

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} A\rho \frac{\partial \mathcal{M}_\rho}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial \theta} - \frac{\partial (\rho \mathcal{E}_\theta)}{\partial z}, \\ A \cdot \frac{\partial \mathcal{M}_\theta}{\partial t} = \frac{\partial (\mathcal{E}_\rho)}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial \rho}, \\ A\rho \frac{\partial \mathcal{M}_z}{\partial t} = \frac{\partial (\rho \mathcal{E}_\theta)}{\partial \rho} - \frac{\partial \mathcal{E}_\rho}{\partial \theta}, \end{array} \right.$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} A\rho \frac{\partial \mathcal{E}_\rho}{\partial t} = \frac{\partial (\rho \mathcal{M}_\theta)}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{M}_z}{\partial \theta}, \\ A \cdot \frac{\partial \mathcal{E}_\theta}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{M}_z}{\partial \rho} - \frac{\partial \mathcal{M}_\rho}{\partial z}, \\ A\rho \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{M}_\rho}{\partial \theta} - \frac{\partial (\rho \mathcal{M}_\theta)}{\partial t}. \end{array} \right.$$

Si soddisfa alle (1) e (2) ponendo

$$(3) \quad \Sigma = \frac{TI\ell}{2\pi} \left[\frac{2\pi A}{T} \cos \frac{2\pi}{T} (t - Ar) + \frac{\sin \frac{2\pi}{T} (t - Ar)}{r} \right] \frac{\rho^2}{r^2},$$

e poi

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}_\rho = 0, \\ \rho \mathcal{M}_\theta = -A \frac{\partial \Sigma}{\partial t}, \\ \mathcal{M}_z = 0, \end{array} \right.$$

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_\rho = -\frac{\partial \Sigma}{\partial z}, \\ \mathcal{E}_\theta = 0, \\ \rho \mathcal{E}_z = \frac{\partial \Sigma}{\partial \rho}. \end{array} \right.$$

La (3) e la seconda delle (4) forniscono

$$\mathcal{M}_0 = \frac{IlA}{\varrho} \left[\sin \frac{2\pi}{T} (t - Ar) - \frac{\cos \frac{2\pi}{T} (t - Ar)}{r} \right] \frac{\varrho^2}{r^2},$$

e, se r è piccolo rispetto alla lunghezza d'onda (T/A),

$$\mathcal{M}_0 = -A \frac{Il \cos \frac{2\pi t}{T}}{r^2} \cdot \frac{\varrho}{r}.$$

A parole « il campo è quello di un elemento di corrente, posto all'origine delle coordinate, diretto secondo la direzione positiva dell'asse z , con la lunghezza l e l'intensità (variabile)

$$I \cos \frac{2\pi t}{T} ».$$

Per grandi valori di r la (3) diventa

$$(3') \quad \Sigma = IlA \cos \frac{2\pi}{T} (t - Ar),$$

e fornisce

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E} = \frac{2\pi}{T} \frac{IlA^2}{r} \sin \frac{2\pi}{T} (t - Ar) \cdot \cos \lambda, \\ \mathcal{M}_0 = \frac{2\pi}{T} \frac{IlA^2}{r} \sin \frac{2\pi}{T} (t - Ar) \cdot \cos \lambda, \end{array} \right.$$

ove con λ si indichi la latitudine.

3. Supponiamo adesso che nel piano $\theta = 0$ l'elemento di corrente studiato al § 2 rotoli, dell'angolo φ , nel verso in cui diminuiscono le λ ; si tratta di determinare le forze elettriche e magnetiche prodotte a distanza.

Per questo osserviamo che è secondo le (6)

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E} = \frac{2\pi}{T} \frac{IlA^2}{r} \sin \frac{2\pi}{T} (t - Ar) \cdot \sin(r, z), \\ \mathcal{M}_0 = \frac{2\pi}{T} \frac{IlA^2}{r} \sin \frac{2\pi}{T} (t - Ar) \cdot \sin(r, z); \end{array} \right.$$

ma (r, z) fisicamente è l'angolo compreso fra il raggio vettore e la direzione della corrente. Ad (r, z) bisogna dunque sostituire il nuovo valore dell'angolo (r, l) .

Sarà

$$\sin(r, l) = \sqrt{1 - \sin^2 \lambda \cos^2 \varphi - \cos^2 \lambda \cos^2 \theta \sin^2 \varphi - 2 \sin \lambda \cos \lambda \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi}.$$

4. E ora il teorema di Poynting permette di calcolare immediatamente la quantità di energia irradiata attraverso ad una superficie σ qualunque dal nostro aereo, durante una vibrazione completa.

Sarà

$$(8) \quad W = \int_0^T dt \int_{\sigma} \frac{\mathcal{E} \mathfrak{M} \cos(p, n)}{4\pi A} d\sigma,$$

indicandosi con p la perpendicolare al piano $(\mathcal{E}, \mathfrak{M})$, con n la normale all'elemento $d\sigma$.

Supponiamo, per procedere nel calcolo, che σ appartenga ad una sfera di raggio R ; avremo subito

$$\int_0^T \sin^2 \frac{2\pi}{T} (t - AR) dt = \frac{T}{2},$$

e dunque, per le (7) e (8),

$$(9) \quad \begin{aligned} W &= \frac{\pi I^2 l^2 A^3}{2TR^2} \int_{\sigma} \sin^2(r, l) \cdot d\sigma \\ &= \frac{\pi I^2 l^2 A^3}{2T} \iint \sin^2(r, l) \cdot \cos \lambda \cdot d\theta d\lambda. \end{aligned}$$

Facciamo variare la λ da $-\alpha$ a $+\alpha$ intendendo che i limiti siano piccolissimi.

Otterremo senz'altro

$$W = \frac{\pi I^2 l^2 A^3 \alpha}{T} \int (1 - \cos^2 \theta \sin^2 \varphi) d\theta,$$

e integrando adesso rispetto a θ fra i limiti $\theta - \beta$ e $\theta + \beta$:

$$(10) \quad \begin{aligned} W &= \frac{2\pi I^2 l^2 A^3 \alpha \beta}{T} (1 - \cos^2 \theta \sin^2 \varphi) \\ &= \frac{\pi I^2 l^2 A^3 \sigma}{2TR^2} (1 - \cos^2 \theta \sin^2 \varphi). \end{aligned}$$

5. Dalla (10) risulta

$$(W)_{\theta=0} = \frac{\pi I^2 l^2 A^3 \sigma}{2TR^2} \cos^2 \varphi,$$

$$(W)_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi I^2 l^2 A^3 \sigma}{2TR^2};$$

e dunque

$$(11) \quad (W)_{\theta=0} = \cos^2 \varphi \cdot (W)_{\theta=\frac{\pi}{2}} \quad (1).$$

« Un'antenna inclinata emette una maggiore quantità di energia di fronte che di fianco ». È facile anzi vedere che l'emissione è massima di fronte e minima di fianco.

Se si desidera il luogo dei punti in cui una superficie assegnata σ , normale alla direzione di propagazione riceve una quantità assegnata di energia, basterà porre

$$\frac{1 - \cos^2 \theta \sin^2 \varphi}{\rho^2} = \text{costante} = a^2,$$

o, in coordinate cartesiane,

$$(12) \quad x^2 \cos^2 \varphi + y^2 = a^2 (x^2 + y^2)^2.$$

Ponendo

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \frac{\cos^2 \varphi}{a}, \\ B = \frac{1}{a}, \end{array} \right.$$

la (12) diventa

$$(13) \quad Ax^2 + By^2 = (x^2 + y^2)^2.$$

La curva (13) è simmetrica rispetto all'origine e rispetto alle direzioni $\theta = 0$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$. Gli assi hanno rispettivamente per valori $2A$ e $2B$; è sempre

$$A < B.$$

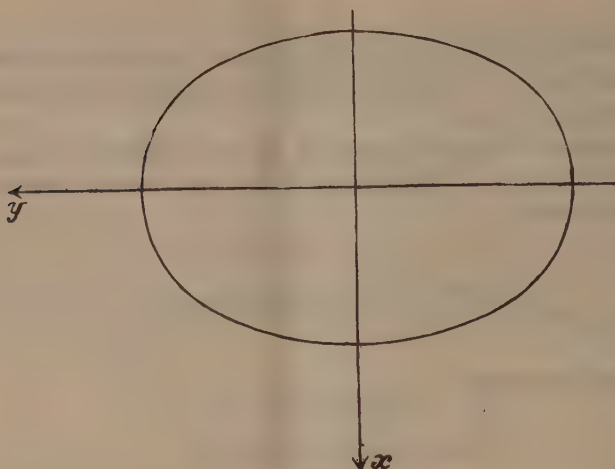
Se, in particolare, l'antenna si inclina a 45° le (11) e (13) danno

$$(11') \quad (W)_{\theta=0} = \frac{1}{2} (W)_{\theta=\frac{\pi}{2}},$$

$$(13') \quad x^2 + 2y^2 = 2a^2(x^2 + y^2)^2.$$

(1) Questo risultato si ottiene già senza calcoli, osservando che dell'antenna è utile la sola componente normale alla direzione di propagazione.

La linea (13'), per un valore opportuno della costante, è rappresentata dal diagramma qui appresso, il quale somiglia perfettamente ai diagrammi



ottenuti dall'Artom con un aereo costituito di due antenne inclinate all'orizzonte come quella che ha formato oggetto del nostro calcolo.

Matematica. — *Sulla sviluppabilità in serie degli integrali delle equazioni differenziali lineari.* Nota del dott. LUIGI AMOROSO, presentata dal Socio PINCHERLE.

In questa Nota ci proponiamo di studiare la sviluppabilità di una funzione, che è integrale di una equazione differenziale lineare, in una serie procedente per aggregati lineari di funzioni date, e di calcolare i coefficienti dello sviluppo in funzione dei coefficienti dell'equazione.

1. Sia una equazione differenziale lineare di ordine n

$$(1) \quad \Delta(y) = q$$

ove è

$$(2) \quad \Delta(y) = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = q.$$

Supponiamo che $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x), q(x)$ sieno funzioni analitiche della variabile complessa x , reali, per x reale, monodrome e regolari senza eccezione entro un cerchio σ , avente per centro l'origine e per raggio un numero s maggiore di 1.

Per x reale variabile da 0 ad 1, $p_1(x), \dots, p_n(x), q(x)$ saranno quindi funzioni reali finite e continue della variabile reale x .

2. Sieno inoltre

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$$

un sistema di funzioni analitiche della variabile complessa x , reali, per x reale, monodrome e regolari senza eccezione entro il cerchio σ sopraddetto. Faremo inoltre le ipotesi seguenti:

I. Le $\varphi_p(x)$ e le loro derivate, fino all'ordine $n - 1$ compreso, si annullano per $x = 0$.

II. Nessuna relazione lineare ed omogenea a coefficienti costanti legghi tra di loro un numero finito delle $\varphi_p(x)$.

Poniamo:

$$(3) \quad \psi_\nu(x) = \frac{\varphi_\nu(x) - \sum_{p=1}^{\nu-1} \psi_p(x) \int_0^1 \Delta(\psi_p(z)) \Delta(\varphi_\nu(z)) dz}{1 / \int_0^1 \left\{ \Delta(\varphi_\nu(x)) - \sum_{p=1}^{\nu-1} \Delta(\psi_p(x)) \int_0^1 \Delta(\psi_p(z)) \Delta(\varphi_\nu(z)) dz \right\}^2 dx}$$

l'operazione Δ essendo definita dalla (2).

Nessuno dei denominatori della (3) può annullarsi. Sia infatti ν il primo indice per cui si abbia

$$\Delta(\varphi_\nu(x)) - \sum_{p=1}^{\nu-1} \Delta(\psi_p(x)) \int_0^1 \Delta(\psi_p(z)) \Delta(\varphi_\nu(z)) dz = 0.$$

$\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_{\nu-1}(x)$ sono funzioni lineari ed omogenee delle $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{\nu-1}(x)$, onde posto

$$\varphi(x) = \varphi_\nu(x) - \sum_{p=1}^{\nu-1} \psi_p(x) \int_0^1 \psi_p(z) \Delta(\varphi_\nu(z)) dz,$$

$\varphi(x)$ risulta una funzione lineare ed omogenea delle $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_\nu(x)$. Ma è

$$\Delta(\varphi(x)) = 0,$$

e siccome per $x = 0$ si annullano $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_\nu(x)$ e le loro derivate, fino all'ordine $n - 1$ incluso, si annulla ancora $\varphi(x)$ e le sue prime $n - 1$ derivate, e quindi è identicamente

$$\varphi(x) = 0,$$

cioè sussiste, contro l'ipotesi, una relazione lineare ed omogenea a coefficienti costanti fra $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_\nu(x)$. Non è quindi possibile che si annulli alcuno dei denominatori delle (3): si ha così una formula ricorrente, che definisce, qualunque sia ν , $\psi_\nu(x)$ come funzione lineare omogenea a coefficienti costanti di $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_\nu(x)$.

Poniamo:

$$(4) \quad P_\nu(x) = \Delta(\psi_\nu(x)).$$

Dalle stesse (3) deduciamo subito che $P_1(x), P_2(x), \dots, P_v(x), \dots$ costituiscono un sistema di funzioni normali ed ortogonali:

$$(5) \quad \int_0^1 P_\mu(x) P_\nu(x) dx = 0 \quad \mu \neq \nu \\ = 1 \quad \mu = \nu.$$

Alle ipotesi I e II aggiungiamo la III: Le funzioni

$$P_1(x), P_2(x), \dots, P_\mu(x), \dots$$

definite dalle (3), (4) costituiscono un sistema *chiuso*, tale cioè che non esiste nessuna funzione finita e continua $\alpha(x)$, per cui si abbia

$$\int_0^1 \alpha(x) P_\mu(x) dx = 0, \quad \mu = 1, 2, \dots$$

a meno che non sia $\alpha(x) \equiv 0$.

Nelle ipotesi I, II, III dimostreremo che la serie

$$(6) \quad \psi(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \psi_\mu(x) \int_0^1 q(x) P_\mu(x) dx$$

converge assolutamente ed uniformemente nell'intervallo 01, e rappresenta l'integrale della (1) che per $x=0$ si annulla insieme alle sue derivate fino all'ordine $n-1$.

3. Premettiamo le osservazioni seguenti. Sia $H_1(x), H_2(x), \dots, H_n(x)$ un sistema fondamentale di integrali dell'equazione omogenea

$$(7) \quad \Delta(y) = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = 0,$$

p_1, p_2, \dots, p_n essendo gli stessi coefficienti della (1). Poniamo

$$(7) \quad F(\xi, x) = \frac{\begin{vmatrix} H_1(\xi) & H_2(\xi) & \dots & H_n(\xi) \\ H'_1(\xi) & H'_2(\xi) & \dots & H'_n(\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_1^{(n-1)}(\xi) & H_2^{(n-1)}(\xi) & \dots & H_n^{(n-1)}(\xi) \\ H_1(x) & H_2(x) & \dots & H_n(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} H_1(\xi) & H_2(\xi) & \dots & H_n(\xi) \\ H'_1(\xi) & H'_2(\xi) & \dots & H'_n(\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_1^{(n-1)}(\xi) & H_2^{(n-1)}(\xi) & \dots & H_n^{(n-1)}(\xi) \\ H_1^{(n)}(\xi) & H_2^{(n)}(\xi) & \dots & H_n^{(n)}(\xi) \end{vmatrix}}.$$

Consideriamo il piano complesso della variabile ξ : nell'interno del cerchio σ non cadendo alcuna singolarità dei coefficienti dell'equazione (6),

(cfr. n. 1), il denominatore dell'espressione precedente è diverso da zero. Se quindi diamo a ξ valori reali compresi tra 0 ed 1, quel denominatore è una funzione reale e continua, il cui limite inferiore è una quantità m diversa da zero.

Analogamente, ξ essendo reale e compreso fra 0 ed 1, le $H_1(\xi), \dots, H_n(\xi)$ sono funzioni reali e continue, e ciascuna di esse ha un limite superiore finito, onde è assegnabile un numero reale positivo h , tale, che il valore assoluto di ciascun elemento del determinante che comparisce al numeratore della (7) è minore di h . Per il noto teorema di Hadamard il valore assoluto di quel determinante è inferiore a $h^n \sqrt{n^n}$, onde posto $M = \frac{h^n \sqrt{n^n}}{m}$, abbiamo:

$$|F(\xi, x)| < M$$

ξ, x essendo reali e compresi tra 0 ed 1.

Analogamente si dimostra subito

$$\left| \frac{\partial^r F(\xi, x)}{\partial x^r} \right| < N, \quad (r = 1, 2, \dots, n-1)$$

N essendo un numero assegnabile, ξ e x essendo sempre reali e compresi tra 0 ed 1.

Introduciamo le funzioni $Q_r(\xi, x)$ uguali a $\frac{\partial^r F}{\partial x^r}$ per $\xi \leq x$ ed uguali a zero per $\xi > x$, avremo

$$(8) \quad \int_0^x \left(\frac{\partial^r F(\xi, x)}{\partial x^r} \right)^2 dx = \int_0^1 (Q_r(\xi, x))^2 dx < A^2, \quad r = 0, 1, \dots, n-1$$

ove si è posto $\frac{\partial^0 F}{\partial x^0} = F$, ed A è un numero superiore a M e N .

4. LEMMA. — Diciamo $\theta(x)$ una funzione reale finita e continua nell'intervallo 0 1, insieme alle sue prime n derivate, che per $x = 0$ si annulla insieme alle sue prime $n-1$ derivate. Poniamo

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta(\theta(x)) = g(x) \\ h(x) = \theta(x) - \int_0^x g(\xi) F(\xi, x) d\xi = \theta(x) - \int_0^1 g(\xi) Q_0(\xi, x) d\xi \\ \text{otteniamo derivando} \\ h^{(r)}(x) = \theta^{(r)}(x) - \int_0^x g(\xi) \frac{\partial^r}{\partial x^r} (F(\xi, x)) d\xi, \quad r = 1, 2, \dots, n-1 \\ h^{(n)}(x) = \theta^{(n)}(x) - g(x) - \int_0^x g(\xi) \frac{\partial^n}{\partial x^n} (F(\xi, x)) d\xi. \end{array} \right.$$

Ma F , considerata come funzione della x , è un integrale dell'equazione omogenea (6), abbiamo quindi tenuto conto della prima delle (9):

$$\Delta(h(x)) = \Delta(\theta(x)) - g(x) = 0.$$

Per ipotesi, per $x = 0$, si annulla $\theta(x)$ insieme alle sue prime $n - 1$ derivate; dalle (9) risulta allora $h(0) = h'(0) = \dots = h^{(n-1)}(0) = 0$, onde abbiamo identicamente $h(x) \equiv 0$, e quindi

$$(10) \quad \begin{cases} \theta(x) = \int_0^x g(\xi) F(\xi, x) d\xi = \int_0^1 g(\xi) Q_0(\xi, x) d\xi \\ \theta^{(r)}(x) = \int_0^x g(\xi) \frac{\partial^r}{\partial x^r} (F(\xi, x)) d\xi = \int_0^1 g(\xi) Q_r(\xi, x) d\xi \\ r = 1, 2, \dots, n - 1. \end{cases}$$

Enunciamo quindi il seguente lemma: *Sia $\theta(x)$ una funzione reale arbitraria finita e continua nell'intervallo 01 insieme alle sue prime n derivate, che per $x = 0$ si annulla insieme alle sue prime $n - 1$ derivate; è sempre possibile porre $\theta(x)$, $\theta'(x)$, \dots , $\theta^{(n-1)}(x)$ nella forma (10), nella quale è $g(x) = \Delta(\theta(x))$.*

5. *Convergenza delle serie.*

Ciò premesso, consideriamo la serie

$$(11) \quad \psi(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \psi_{\mu}(x) \int_0^1 g(z) P_{\mu}(z) dz.$$

Per il lemma precedente è

$$\psi_{\mu}(x) = \int_0^1 P_{\mu}(\xi) Q_0(\xi, x) d\xi,$$

onde, sostituendo, la serie precedente diviene

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \int_0^1 P_{\mu}(\xi) Q_0(\xi, x) d\xi \int_0^1 g(z) P_{\mu}(z) dz.$$

Essendo, nell'intervallo 01, $\int_0^1 (Q_0(\xi, x))^2 d\xi < A^2$, le $P_1(x)$, $P_2(x)$, \dots funzioni normali ortogonali, per un teorema di Schmidt⁽¹⁾, essa converge assolutamente ed uniformemente in tutto l'intervallo 01. Essa quindi rappresenta in questo intervallo una funzione finita e continua $\psi(x)$.

Analogamente, essendo, sempre per il lemma precedente:

$$\psi_{\mu}^{(r)}(x) = \int_0^1 P_{\mu}(\xi) Q_r(\xi, x) d\xi, \quad r = 1, 2, \dots, n - 1,$$

si dimostra che convergono assolutamente ed uniformemente le serie che si ottengono dalla (11) derivando successivamente 1, 2, ... $n - 1$ volte.

Osserviamo ancora che, le φ_p essendo per ipotesi funzioni analitiche uniformi della variabile complessa x , regolari senza eccezione entro il cerchio σ , anche le ψ_p che, secondo le (3), sono combinazioni lineari di un numero finito delle φ_p , saranno entro lo stesso cerchio σ funzioni analitiche, uniformi della x , regolari senza eccezioni.

La serie (11) essendo convergente uniformemente, per il lemma di Weierstrass, la $\psi(x)$ sarà ancora essa una funzione analitica uniforme e regolare entro σ .

Esistono quindi della $\psi(x)$, entro σ , tutte le derivate fino all'ordine che più piace: secondo le considerazioni precedenti *le prime $n - 1$ sono rappresentate dalle serie, che si ottengono dalla (11) derivando termine a termine.*

6. Somma della serie.

Detto $G(x)$ l'integrale dell'equazione proposta (1), che per $x = 0$ si annulla insieme alle sue prime $n - 1$ derivate, dimostriamo $G(x)$ coincide con la somma della serie (11) $\psi(x)$.

Essendo f, φ due funzioni finite e continue, derivabili n volte abbiamo la formula di integrazione per parti

$$(12) \quad \int_0^1 \varphi \Delta(f) dx = \int_0^1 f \Gamma(\varphi) dx + \alpha(f, \varphi),$$

ove è

$$\Delta(f) = f^{(n)} + p_1 f^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} f' + p_n f$$

$$\Gamma(\varphi) = p_n \varphi - \frac{d(p_{n-1}\varphi)}{dx} + \frac{d^2(p_{n-2}\varphi)}{dx^2} - \dots + (-1)^n \frac{d^n \varphi}{dx^n}$$

$$\alpha(f, \varphi) = \left\{ f \left(p_{n-1} \varphi - \frac{d(p_{n-2}\varphi)}{dx} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1} \varphi}{dx^{n-1}} \right) + \right. \\ \left. + f' \left(p_{n-2} \varphi - \frac{d(p_{n-3}\varphi)}{dx} + \dots + (-1)^n \frac{d^{n-2} \varphi}{dx^{n-2}} \right) + \dots + f^{(n-1)} \varphi \right\}_0^1.$$

Posto quindi:

$$(13) \quad h(x) = G(x) - \psi(x) = G(x) - \sum_{\mu}^{\infty} \psi_{\mu}(x) \int_0^1 q(z) P_{\mu}(z) dz,$$

per quanto abbiamo visto nel numero precedente, la $h(x)$ è una funzione analitica monodroma e regolare entro il cerchio σ , di cui le prime $n - 1$ derivate si ottengono derivando termine a termine la serie a destra. Otteniamo quindi, eseguendo operazioni di calcolo letterale, relative a serie convergenti assolutamente ed uniformemente:

$$\alpha(h, P_v) = \alpha(G, P_v) - \sum_{\mu}^{\infty} \alpha(\psi_{\mu}, P_v) \int_0^1 q(z) P_{\mu}(z) dz$$

per tutti i valori all'indice ν . Abbiamo poi dalla (13):

$$\int_0^1 h(x) \Gamma(P_\nu(x)) dx = \int_0^1 G(x) \Gamma(P_\nu(x)) dx - \\ - \sum_{\mu}^{1, \dots, \infty} \int_0^1 \psi_\mu(x) \Gamma(P_\nu(x)) dx \int_0^1 q(z) P_\mu(z) dz,$$

e, sommando membro a membro le relazioni precedenti, ed applicando la (12):

$$\int_0^1 \Delta(h(x)) P_\nu(x) dx = \int_0^1 \Delta(G(x)) P_\nu(x) dx - \\ - \sum_{\mu}^{1, \dots, \infty} \int_0^1 \Delta(\psi_\mu(x)) P_\nu(x) dx \int_0^1 q(z) P_\mu(z) dz$$

per tutti i valori dell'indice ν : e siccome è $\Delta(G) = q$, $\Delta(\varphi_\mu) = P_\mu$, e le P_1, P_2, \dots sono normali ortogonali, così abbiamo

$$\int_0^1 \Delta(h(x)) P_\nu(x) dx = \int_0^1 q(x) P_\nu(x) dx - \int_0^1 P_\nu(z) q(z) dz = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots$$

Ma il sistema delle P_ν è chiuso per ipotesi, onde risulta $\Delta(h(x)) = 0$. Per $x = 0$, si annullano, insieme alle loro derivate fino all'ordine $n - 1$ incluso, $G(x)$ e tutte le $\varphi_\mu(x)$, quindi $h(x)$; segue che è identicamente $h(x) \equiv 0$, ossia la serie (11)

$$\psi(x) = \sum \psi_\mu(x) \int_0^1 q(z) P_\mu(z) dz$$

rappresenta l'integrale della (1), che per $x = 0$ si annulla insieme alle sue prime $n - 1$ derivate.

7. Integrale generale.

Mostriamo come dalla serie (11) si possa dedurre l'integrale generale della equazione (1).

Sia $g(x)$ un integrale generico della (1): diciamo $\varphi(x)$ una funzione finita, continua, deribabile n volte nell'intervallo 01 , soggetta all'unica condizione che, per $x = 0$, si abbia

$$\varphi(0) = g(0), \quad \varphi'(0) = g'(0), \quad \dots \quad \varphi^{(n-1)}(0) = g^{(n-1)}(0).$$

Posto allora

$$(14) \quad G(x) = g(x) - \varphi(x) \quad , \quad Q(x) = q(x) - \Delta(\varphi(x)),$$

abbiamo

$$\Delta(G(x)) = Q(x)$$

e quindi, $G(x)$ e le sue prime $n - 1$ derivate essendo nulle per $x = 0$, abbiamo, applicando il teorema precedente, che $G(x)$ è rappresentato dalla serie (6)

$$G(x) = \sum_{\mu}^{1, \dots, \infty} \psi_{\mu}(x) \int_0^1 Q(x) P_{\mu}(x) dx.$$

Tenendo conto delle (14) abbiamo quindi la formula definitiva che comprende la precedente (11) come caso particolare

$$(15) \quad G(x) = \varphi(x) - \sum_{\mu}^{\infty} \psi_{\mu}(x) \int_0^1 P_{\mu}(x) \Delta(\varphi(x)) dx + \\ + \sum_{\mu}^{\infty} \psi_{\mu}(x) \int_0^1 P_{\mu}(x) q(x) dx.$$

Essendo $\varphi(x)$ una funzione arbitraria, la (15) rappresenta l'integrale generale della (1), tale che per $x = 0$ esso e le sue prime $n - 1$ derivate assumono i valori $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$, ..., $\varphi^{(n-1)}(0)$. Le $\psi_{\mu}(x)$ e le $P_{\mu}(x)$ sono definite dalle formule (3), (4).

Geodesia. — *Determinazione astronomica di latitudine eseguita nella Specola geodetica dell' Università di Genova nel 1908 col metodo delle distanze zenitali in meridiano.* Nota di U. BARBIERI, presentata dal Corrispondente V. REINA.

Matematica. — *Sul problema di Hurwitz.* Nota del dott. LUCIANO ORLANDO, presentata dal Corrispondente A. DI LEGGE.

Le precedenti Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Fisica matematica. — *Estensione d'una formola di Fresnel ai mezzi cristallini eterogenei.* Nota di LUIGI GIUGANINO, presentata dal Corrispondente A. GARBASSO.

1. In un mezzo anisotropo omogeneo si osservano due diverse specie di onde luminose piane, caratterizzate dalle due diverse velocità con le quali si propagano lungo una stessa direzione normale al piano dell'onda.

Queste due velocità sono radici dell'equazione biquadratica di Fresnel

$$(1) \quad \frac{\lambda^2}{v^2 - a^2} + \frac{\mu^2}{v^2 - b^2} + \frac{\nu^2}{v^2 - c^2} = 0,$$

essendo λ, μ, ν i coseni direttori della normale alla superficie dell'onda

piana rispetto agli assi dell'ellissoide di polarizzazione, ed $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ le semilunghezze di questi assi.

In questa Nota mi propongo di dimostrare che l'equazione (1) di Fresnel si estende alla superficie frontale di un'onda, la quale si propaghi in un mezzo anisotropo qualunque, qualora si ammetta che le componenti $\alpha, \beta, \gamma, X, Y, Z$ dei vettori luminosi di Neumann e di Fresnel restano continue attraverso a tale superficie, mentre qualcuna delle loro derivate (d'ordine finito) rispetto al tempo presenta ivi una discontinuità.

Queste condizioni sono verificate per le onde piane luminose che si propagano nei mezzi anisotropi omogenei, quando le componenti dei vettori di Neumann e di Fresnel secondo gli assi cartesiani sono della forma

$$\begin{aligned}
 \alpha &= A_1 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{\lambda x + \mu y + \nu z}{V} \right) \\
 \beta &= A_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{\lambda x + \mu y + \nu z}{V} \right) \\
 \gamma &= A_3 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{\lambda x + \mu y + \nu z}{V} \right) \\
 (2) \quad X &= B_1 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{\lambda x + \mu y + \nu z}{V} \right) \\
 Y &= B_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{\lambda x + \mu y + \nu z}{V} \right) \\
 Z &= B_3 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{\lambda x + \mu y + \nu z}{V} \right)
 \end{aligned}$$

($A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ sono delle costanti convenienti), e la superficie frontale dell'onda è il piano mobile $t - \frac{\lambda x + \mu y + \nu z}{V} = 0$.

2. Indichiamo con x, y, z delle coordinate ortogonali (cartesiane o curvilinee), e con

$$(3) \quad ds^2 = \xi^2 dx^2 + \eta^2 dy^2 + \zeta^2 dz^2$$

il quadrato dell'elemento lineare.

Siano $\alpha, \beta, \gamma, X, Y, Z$ le componenti dei vettori di Neumann e Fresnel secondo le normali alle superficie $x = \text{cost.}, y = \text{cost.}, z = \text{cost.}$: esse devono

soddisfare le equazioni

$$(4) \quad \begin{aligned} -\frac{\partial \alpha}{\partial t} &= \frac{1}{\eta \zeta} \left\{ \frac{\partial \cdot \zeta Z}{\partial y} - \frac{\partial \cdot \eta Y}{\partial z} \right\} \\ -\frac{\partial \beta}{\partial t} &= \frac{1}{\zeta \xi} \left\{ \frac{\partial \cdot \xi X}{\partial z} - \frac{\partial \cdot \zeta Z}{\partial x} \right\} \\ -\frac{\partial \gamma}{\partial t} &= \frac{1}{\xi \eta} \left\{ \frac{\partial \cdot \eta Y}{\partial x} - \frac{\partial \cdot \xi X}{\partial y} \right\} \end{aligned}$$

$$(5) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{11} \frac{\partial X}{\partial t} + \varepsilon_{12} \frac{\partial Y}{\partial t} + \varepsilon_{13} \frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{1}{\eta \zeta} \left\{ \frac{\partial \cdot \zeta \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \cdot \eta \beta}{\partial z} \right\} \\ \varepsilon_{12} \frac{\partial X}{\partial t} + \varepsilon_{22} \frac{\partial Y}{\partial t} + \varepsilon_{13} \frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{1}{\zeta \xi} \left\{ \frac{\partial \cdot \xi \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \cdot \zeta \gamma}{\partial x} \right\} \\ \varepsilon_{13} \frac{\partial X}{\partial t} + \varepsilon_{23} \frac{\partial Y}{\partial t} + \varepsilon_{23} \frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{1}{\xi \eta} \left\{ \frac{\partial \cdot \eta \beta}{\partial x} - \frac{\partial \cdot \xi \alpha}{\partial y} \right\}. \end{aligned}$$

Nella teoria elettromagnetica della luce $\alpha, \beta, \gamma, X, Y, Z$ sono le componenti della forza magnetica ed elettrica; le ε sono funzioni di x, y, z che caratterizzano in ogni punto le proprietà elettriche del mezzo trasparente; la permeabilità magnetica di questo è costante in tutti i punti, e per comodità si pone eguale ad uno.

La condizione che α, β, γ rimangano continue al passaggio dell'onda porta alla conseguenza che l'integrale $\int (\alpha \xi dx + \beta \eta dy + \gamma \zeta dz)$ esteso ad un contorno arbitrario sulla superficie dell'onda rimane continuo attraverso a questa, e, pel teorema di Ampère sulle azioni elettromagnetiche, la corrente di spostamento che accompagna o costituisce la luce nel dielettrico, si chiude entro la superficie dell'onda che la propaga: e questa è l'ipotesi fondamentale della teoria di Maxwell (¹).

Nella teoria elastica della luce α, β, γ si possono interpretare come componenti della velocità molecolare, ed $\varepsilon_{11}X + \varepsilon_{12}Y + \varepsilon_{13}Z$. ecc. come componenti della rotazione molecolare, essendo le ε funzioni dei coefficienti di elasticità, che variano da punto a punto. Per la natura stessa di α, β, γ conviene ammettere che siano continue al passaggio dell'onda, mentre le $\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \beta}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial t}$, essendo delle accelerazioni, saranno generalmente discontinue sulla superficie dell'onda. Se le accelerazioni d'ordine superiore fossero tutte continue su tale superficie fino alla n^{esima} , ma la $(n+1)^{esima}$ fosse discontinua, i calcoli seguenti varrebbero identicamente per quest'ultima.

(¹) Si potrebbe considerare il caso che la discontinuità della forza magnetica sia normale alla superficie dell'onda, ma questo esame esorbita dallo scopo delle presente Nota.

Indicando per brevità con $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$ i primi membri delle (5), si hanno le due relazioni evidenti

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial \cdot \eta \xi \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \cdot \xi \xi \beta}{\partial y} + \frac{\partial \cdot \xi \eta \gamma}{\partial z} \right\} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial \cdot \eta \xi u}{\partial x} + \frac{\partial \cdot \xi \xi v}{\partial y} + \frac{\partial \cdot \xi \eta w}{\partial z} \right\} &= 0. \end{aligned}$$

La densità dell'energia totale in ogni punto è espressa a meno di un fattore costante da

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \varepsilon_{11}X^2 + \varepsilon_{22}Y^2 + \varepsilon_{33}Z^2 + 2\varepsilon_{12}XY + 2\varepsilon_{23}YZ + 2\varepsilon_{13}ZX;$$

ed in ogni punto vi sono tre direzioni principali per cui si ha

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{13} = 0.$$

Al passaggio della superficie dell'onda la densità dell'energia rimane continua, ma diventa funzione del tempo, cosicchè si ha dell'energia che si propaga.

La superficie frontale dell'onda, ove al tempo t è giunta la luce, è una superficie mobile S , la cui equazione scriveremo

$$(7) \quad S(t, x, y, z) = 0$$

o, risolvendo rispetto al tempo,

$$(7') \quad t - \psi(x, y, z) = 0.$$

Essa si propaga con una velocità, la cui componente secondo la normale ad S è data da

$$(8) \quad \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \sqrt{\left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{1}{\zeta} \frac{\partial S}{\partial z}\right)^2} = 0.$$

La superficie S divide lo spazio indefinito in due regioni: nello spazio 1, ove non è ancora giunta la perturbazione luminosa, le $\alpha, \beta, \gamma, X, Y, Z$ sono indipendenti dal tempo, e continuano a soddisfare le (4) e (5) (ammettendo, per la teoria elettromagnetica, che le forze nell'equilibrio dipendano da un potenziale): nello spazio 2 le $\alpha \dots, X \dots$ sono funzioni del tempo.

Indichiamo con gli indici 1 e 2 le $\alpha \dots, X \dots$ negli spazi 1 e 2; e poniamo per brevità $\alpha, \beta, \gamma, X, Y, Z$ invece di $\alpha_2 - \alpha_1, \beta_2 - \beta_1 \dots X_2 - X_1, \dots$ Le nuove $\alpha, \beta, \gamma, X, Y, Z$ sono definite solamente nello spazio 2, e sopra S ; nello spazio 2 continuano a soddisfare le (4) e (5), sopra S si annullano, ed ammettono derivate prime non tutte nulle (Si vede facilmente che se le

derivate di $\alpha, \dots X \dots$ sono uniformi e continue nei punti dello spazio 2 sufficientemente vicini ad S, esistono pure le derivate lungo la S medesima).

3. Poniamo

$$(9) \quad \theta = t - \psi(x, y, z),$$

essendo ψ la funzione che figura nella (7'), cosicchè $\theta = 0$ è l'equazione della superficie dell'onda: e formiamo un'equazione differenziale alla quale la ψ debba soddisfare.

Indichiamo con \overline{F} una funzione del tempo, e di x, y, z quando viene espressa per mezzo di θ, x, y, z come variabili indipendenti, e con F la stessa funzione espressa per mezzo di t, x, y, z .

Si ha

$$\overline{F}(\theta, x, y, z) = F(t - \psi(x, y, z), x, y, z)$$

e

$$(10) \quad \frac{\partial \overline{F}}{\partial \theta} = \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Derivando rapporto ad x, y, z si trova immediatamente

$$(11) \quad \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial \overline{F}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{F}}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial \overline{F}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{F}}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= \frac{\partial \overline{F}}{\partial z} - \frac{\partial \overline{F}}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial z}. \end{aligned}$$

Osserviamo che se per $\theta = 0$, cioè sulla superficie dell'onda, è

$$\overline{F}(\theta, x, y, z) = 0,$$

questo si verifica in tutto lo spazio a tre dimensioni percorso dalla superficie dell'onda, e perciò in tutto questo spazio $\frac{\partial \overline{F}}{\partial x}, \frac{\partial \overline{F}}{\partial y}, \frac{\partial \overline{F}}{\partial z}$ devono annullarsi per $\theta = 0$: allora sulla superficie dell'onda si deve avere ad ogni istante $\frac{\partial F}{\partial x} = - \frac{\partial \overline{F}}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial x}$ ecc. Cioè le tre derivate di F rapporto ad x, y, z non

possono annullarsi senza che si annulli anche $\frac{\partial \overline{F}}{\partial \theta} = \frac{\partial F}{\partial t}$; e viceversa se $\frac{\partial F}{\partial t}$ sull'onda non è nulla, una almeno delle derivate di F rispetto ad x, y, z dev'essere diversa da zero, salvo che il punto x, y, z sia un punto conico per la $t - \psi(x, y, z) = 0$, nel quale si abbia

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0.$$

4. Applichiamo le (10) ed (11) alle (4) e (5). Trasportiamo subito nei primi membri le derivate rapporto a θ , ordinandole rispetto alle lettere

$\alpha, \beta, \gamma, X, Y, Z$; dopo effettuato il calcolo è inutile ritenere il tratto sopra le lettere, e possiamo sopprimerlo, ricordandoci che le derivazioni sono fatte rispetto alle θ, x, y, z come variabili indipendenti.

Si ottiene:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial \alpha}{\partial \theta} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial Z}{\partial \theta} = \frac{1}{\eta \xi} \left(\frac{\partial \cdot \xi Z}{\partial y} - \frac{\partial \cdot \eta Y}{\partial z} \right) \\
 & -\frac{\partial \beta}{\partial \theta} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial X}{\partial \theta} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial Z}{\partial \theta} = \frac{1}{\xi \xi} \left(\frac{\partial \cdot \xi X}{\partial z} - \frac{\partial \cdot \xi Z}{\partial x} \right) \\
 & -\frac{\partial \gamma}{\partial \theta} - \frac{1}{\eta} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial X}{\partial \theta} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial \theta} = \frac{1}{\xi \eta} \left(\frac{\partial \cdot \eta Y}{\partial x} - \frac{\partial \cdot \xi X}{\partial y} \right) \\
 & -\frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \beta}{\partial \theta} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} + \epsilon_{11} \frac{\partial X}{\partial \theta} + \epsilon_{12} \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \epsilon_{13} \frac{\partial Z}{\partial \theta} = \\
 (12) \quad & = \frac{1}{\eta \xi} \left(\frac{\partial \cdot \xi \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \cdot \eta \beta}{\partial z} \right) \\
 & \frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} + \epsilon_{12} \frac{\partial X}{\partial \theta} + \epsilon_{22} \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \epsilon_{23} \frac{\partial Z}{\partial \theta} = \\
 & = \frac{1}{\xi \xi} \left(\frac{\partial \cdot \xi \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \cdot \xi \gamma}{\partial x} \right) \\
 & -\frac{1}{\eta} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial \theta} + \epsilon_{13} \frac{\partial X}{\partial \theta} + \epsilon_{23} \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \epsilon_{33} \frac{\partial Z}{\partial \theta} = \\
 & = \frac{1}{\xi \eta} \left(\frac{\partial \cdot \eta \beta}{\partial x} - \frac{\partial \cdot \xi \alpha}{\partial y} \right).
 \end{aligned}$$

Per quello che s'è già visto più sopra, facendo $\theta = 0$ i secondi membri delle (12) sono nulli in tutto lo spazio a tre dimensioni percorso dalla superficie dell'onda. Affinchè le derivate di $\alpha, \beta, \gamma, X, Y, Z$ rapporto a θ non siano identicamente nulle per $\theta = 0$ è necessario che si annulli il determinante dei coefficienti di queste derivate, ed è sufficiente che non siano nulli contemporaneamente tutti i suddeterminanti d'una stessa orizzontale. Si ha perciò l'equazione differenziale della superficie dell'onda

$$(13) \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial z} & \frac{1}{\eta} \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial z} & 0 & -\frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{\eta} \frac{\partial \psi}{\partial y} & \frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial x} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial z} & \frac{1}{\eta} \frac{\partial \psi}{\partial y} & \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial z} & 0 & -\frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial x} & \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \frac{1}{\eta} \frac{\partial \psi}{\partial y} & \frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial x} & 0 & \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

La regola di Laplace per le due matrici di tre orizzontali mostra che i termini di sesto grado nello sviluppo del determinante si elidono, e l'equazione (13) è di quarto grado nelle derivate parziali.

Il determinante (14) si riduce facilmente alla forma

$$\begin{vmatrix} \epsilon_{11} - \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 & \epsilon_{12} + \frac{1}{\xi \eta} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} & \epsilon_{13} + \frac{1}{\xi \zeta} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ \epsilon_{12} + \frac{1}{\xi \eta} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} & \epsilon_{22} - \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 & \epsilon_{23} + \frac{1}{\eta \zeta} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ \epsilon_{13} + \frac{1}{\xi \zeta} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial z} & \epsilon_{23} + \frac{1}{\eta \zeta} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial z} & \epsilon_{33} - \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Ora ponendo $S(t, x, y, z) = t - \psi(x, y, z) = 0$ nella (8) si ricava

$$V = - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{1}{\zeta} \frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2}}$$

e d'altra parte si ha, a meno del segno \pm ,

$$\lambda = \frac{V}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \mu = \frac{V}{\eta} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \nu = \frac{V}{\zeta} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \text{con} \quad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1.$$

Sostituendo questi valori nella (13') e moltiplicando per V^6 si ottiene

$$(14) \quad \begin{vmatrix} \epsilon_{11} V^2 + \lambda^2 - 1 & \epsilon_{12} V^2 + \lambda \mu & \epsilon_{13} V^2 + \lambda \nu \\ \epsilon_{12} V^2 + \lambda \mu & \epsilon_{22} V^2 + \mu^2 - 1 & \epsilon_{23} V^2 + \mu \nu \\ \epsilon_{13} V^2 + \lambda \nu & \epsilon_{23} V^2 + \mu \nu & \epsilon_{33} V^2 + \nu^2 - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Questa equazione bicubica in V si spezza nel prodotto di V^2 per una equazione biquadratica; è più generale che quella di Fresnel, e si applica a mezzi anisotropi qualsiasi; si riduce alla (1) quando in tutti i punti del mezzo rifrangente le *direzioni principali* di polarizzazione dielettrica o di elasticità coincidono con le normali alle superficie ortogonali

$$x = \text{cost} \quad , \quad y = \text{cost} \quad , \quad z = \text{cost}.$$

In questo caso $\epsilon_{12} = \epsilon_{22} = \epsilon_{13} = 0$; l'equazione (14) divisa per

$$V^2(\epsilon_{11} V^2 - 1)(\epsilon_{22} V^2 - 1)(\epsilon_{33} V^2 - 1)$$

diviene

$$1 + \frac{\lambda^2}{\epsilon_{11} V^2 - 1} + \frac{\mu^2}{\epsilon_{22} V^2 - 1} + \frac{\nu^2}{\epsilon_{33} V^2 - 1} = 0$$

che coincide con la (1) di Fresnel, quando si ponga

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{a^2}, \quad \epsilon_{22} = \frac{1}{b^2}, \quad \epsilon_{33} = \frac{1}{c^2}$$

e si facciano le ovvie riduzioni.

5. La discontinuità dei vettori $\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \beta}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial t}$ e $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}$ giace nel piano tangente alla superficie dell'onda.

Infatti in ambedue le teorie della luce i vettori $\alpha, \beta, \gamma, u, v, w$ devono soddisfare non soltanto le (6), ma anche le due relazioni

$$\frac{1}{\xi \eta \zeta} \left\{ \frac{\partial \cdot \eta \zeta \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \cdot \xi \zeta \beta}{\partial y} + \frac{\partial \cdot \xi \eta \gamma}{\partial z} \right\} = 0$$

$$\frac{1}{\xi \eta \zeta} \left\{ \frac{\partial \cdot \eta \zeta X}{\partial x} + \frac{\partial \cdot \xi \zeta Y}{\partial y} + \frac{\partial \cdot \xi \eta Z}{\partial z} \right\} = 0.$$

Applichiamo a queste due equazioni le (11) tenendo conto che per $\theta = 0$ le $\alpha, \beta, \gamma, u, v, w$ sono nulle in tutto lo spazio 2: otteniamo

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \beta}{\partial \theta} + \frac{1}{\zeta} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} = 0,$$

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial \theta} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \frac{1}{\zeta} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial Z}{\partial \theta} = 0.$$

Queste due relazioni esprimono appunto la proprietà enunciata pei due vettori, e significano che l'onda è trasversale.

6. Tornando alle equazioni (7) e (8) poniamo per brevità

$$\frac{\partial S}{\partial t} = p_0, \quad \frac{\partial S}{\partial x} = p_1, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = p_2, \quad \frac{\partial S}{\partial z} = p_3$$

e facciamo la sostituzione in (14): si ottiene così la più generale equazione differenziale per la superficie dell'onda sotto la forma

$$(15) \quad \begin{vmatrix} \epsilon_{11} p_0^2 - p_2^2 - p_3^2 & \epsilon_{12} p_0^2 + p_1 p_2 & \epsilon_{13} p_0^2 + p_1 p_3 \\ \epsilon_{12} p_0^2 + p_1 p_2 & \epsilon_{22} p_0^2 - p_3^2 - p_1^2 & \epsilon_{23} p_0^2 + p_2 p_3 \\ \epsilon_{13} p_0^2 + p_1 p_3 & \epsilon_{23} p_0^2 + p_2 p_3 & \epsilon_{33} p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Com'è ben noto, la $S(t, x, y, z) = 0$ è determinata da questa equazione differenziale quando si imponga la condizione che per $t = 0$ determinata si riduca ad una data superficie S_0 .

In un'altra Nota esporrò le soluzioni che si ottengono in alcuni casi molto semplici, nei quali si può facilmente trovare un integrale completo della (15).

Intanto voglio rilevare il fatto che risulta dalle equazioni (14) o (15); che in un mezzo cristallino eterogeneo una data sorgente luminosa S_0 emette due sole specie di onde, le quali sono caratterizzate dalle due diverse velocità (positive) di propagazione secondo la normale.

Fisica.— *Sulla variazione di isteresi nei corpi magnetici in campi alternativi sotto l'azione di correnti ad alta frequenza. Nuovo rivelatore di onde hertziane.* Nota del prof. RICCARDO ARNÒ, presentata dal Socio G. COLOMBO.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sul fenomeno Majorana nei campi oscillatori.* Nota di O. M. CORBINO, presentata dal Socio P. BLASERNA.

La spiegazione ormai universalmente accettata, che fa consistere il fenomeno Majorana in una orientazione, prodotta dal campo, sulle particelle sospese nella soluzione colloidale d'idrato ferrico, rende per diverse ragioni più interessanti le ricerche destinate allo studio del fenomeno nei campi variabili.

Già il Majorana stesso aveva riconosciuto che nel campo dovuto a un piccolo solenoide percorso dalle scariche d'una bottiglia di Leyda, si manifestano nettamente effetti di birifrangenza. Poco dopo Ewell⁽¹⁾ dimostrò che sotto l'azione del campo prodotto da un elettromagnete traversato da correnti alternate comuni le frange del compensatore di Babinet (il cui spostamento misurava la birifrangenza acquistata dal ferro Bravais nel campo) apparivano spostate, ma molto torbide, come se fossero animate da un rapido movimento.

Seguirono le pregevolissime ricerche di Cotton e Mouton⁽²⁾ sulla birifrangenza magnetica nei campi costanti, le quali dimostrarono, fra l'altro, la esistenza nel ferro Bravais di due specie diverse di particelle: le une molto piccole che sarebbero dotate di birifrangenza negativa, le altre notevolmente più grosse, e raccogliendosi perciò di preferenza nel fondo della bottiglia, e dotate invece di birifrangenza positiva. Consigliai perciò al dott. Tiers di separare, per quanto fosse possibile, dei campioni di liquido prevalentemente ricchi di particelle negative o positive e di studiare con essi l'azione dei campi variabili dovuti alle scariche oscillatorie d'alta frequenza.

Il Tiers, superando notevoli difficoltà sperimentali, ottenne dei risultati molto interessanti. Essi dimostrerebbero che anche le più piccole particelle, cioè quelle a birifrangenza negativa, non sono capaci di seguire interamente le vicissitudini del campo oscillante con la frequenza di circa un milione e mezzo di periodi per secondo. Ma sotto l'azione dei successivi impulsi (che son tutti in un senso poichè la birifrangenza è proporzionale al quadrato del

(¹) *Phys. Review*, t. XVIII, 1903, pag. 292.

(²) *Ann. d. Chimie et de Phys.*, t. XI, pag. 145, 1907.

campo) la birifrangenza crescerebbe rapidamente, conserverebbe un valore sensibilmente costante (malgrado le oscillazioni del campo) e poscia decrescerebbe in modo aperiodico.

E invero le frange al compensatore di Babinet, che venivan prodotte utilizzando la luce stessa della scintilla determinante la scarica, apparivano spostate dalla posizione normale, un po' torbide, ma della larghezza normale.

I liquidi positivi non diedero traccia di birifrangenza, e i liquidi misti diedero solo una birifrangenza negativa, cosicchè parrebbe che l'azione della scarica, per la sua breve durata, basti a orientare, sebbene aperiodicamente, le particelle negative, ma non si esplichino affatto sulle particelle positive più grosse.

Contemporaneamente io eseguii, sui medesimi campioni che servirono al Tiers, delle ricerche in campi oscillatorii persistenti, di frequenza naturalmente più bassa, e su queste mi permetto oggi di riferire brevemente.

Era utile cominciare, anzitutto, dallo studio della birifrangenza nei campi prodotti con le correnti alternate industriali; e ciò perchè Ewell aveva ricercato in blocco il ferro Bravais comune, ch'è un liquido misto, e aveva accennato solo all'intorbidamento delle frange, cosicchè non si sapeva se al passaggio del campo per zero si annullasse del tutto la birifrangenza, o se ne restasse una frazione più o meno rilevante.

Ricorsi perciò a un'elettrocalamita anulare, costruita con fili di ferro di $\frac{2}{10}$ di millimetro, nel cui interferometro molto corto si collocava una vaschetta di vetro con la soluzione. Un fascio di luce solare traversava un nicol, la vaschetta, il compensatore di Babinet e un secondo nicol incrociato col primo. Eccitando il campo alternativo le frange si spostavano d'un tratto circa eguale al loro intervallo, manifestandosi molto torbide nella nuova posizione; cosicchè sembrava che esse oscillassero, ma di poco, senza tornar mai nella posizione normale.

Bastò ricorrere a un'illuminazione intermittente (ottenuta interrompendo il fascio con un disco rotante munito di strettissime fenditure, in modo che l'illuminazione avesse una durata brevissima), e realizzare quasi il sincronismo fra le intermittenze luminose e il semiperiodo della corrente alternata, perchè le frange apparissero immobili, o animate da un lievissimo movimento oscillatorio, come nei comuni processi stroboscopici. E così poté essere accertato il ritorno assoluto delle frange nella posizione normale a una certa fase del regime oscillatorio, dimostrandosi con ciò che la birifrangenza seguiva fedelmente le vicissitudini del campo, annullandosi con questo.

Questo risultato fu ottenuto tanto coi liquidi negativi che con quelli positivi. La frequenza era di 42 periodi per secondo; ma a causa della presenza del ferro il campo passava assai rapidamente pel valore zero, come si poté constatare col tubo di Braun.

Ottenere campi persistenti di frequenza maggiore delle industriali e di notevole intensità è molto difficile. Or a me occorreva un campo di

almeno un migliaio d'unità e di frequenza notevolmente inferiore a quella utilizzata dal Tieri. Il rallentare le scariche oscillatorie d'un condensatore, con l'inserzione di una forte self, aveva per effetto di diminuire molto la intensità della corrente di scarica, e quindi l'intensità del campo.

D'altra parte i dispositivi per la produzione di correnti persistenti, da me a lungo altra volta studiati, permettono solo di ottenere correnti di non grandissima intensità; mentre l'adozione del ferro ha il doppio effetto di rendere i dispositivi suddetti spesso impraticabili, e, in ogni caso, d'aumentare moltissimo l'induttanza del sistema oscillante, abbassando di molto la frequenza. Era inoltre necessario ricorrere a un circuito magnetico quasi chiuso, con un interfero di pochi millimetri, e lavorare con elevati valori dell'induzione; si aveva perciò, come anche pel gran numero di alternazioni a secondo, una rilevante dissipazione d'energia per isteresi.

Per utilizzare il dispositivo di Duddel costruii una piccola elettrocalamita anulare del diametro di 4 cm., e spessa circa 1 cm. Il nucleo era costituito da fili di ferro finissimi, e lasciava libero un interfero di circa 6 mm.; vi erano avvolti fino alle estremità polari due strati di filo sottile accuratamente isolato, cosicchè con la corrente di 2 o 3 ampères era possibile ottenere nell'interfero un campo cui corrispondeva una birifrangenza magnetica vivamente apprezzabile.

Con questo elettromagnete, e con una capacità di 20 microfarad, fu costituito un circuito Duddel derivato ai poli d'un arco voltaico. E con qualche tentativo, manovrando i carboni a mano, si riusciva a eccitare delle oscillazioni elettriche che duravano un tempo sufficiente per le osservazioni. Era perciò necessaria una forte capacità, che associata alla grande autoinduzione della bobinetta abbassava notevolmente la frequenza; cosicchè non poterono essere oltrepassate 1500 vibrazioni al secondo.

Per l'osservazione della birifrangenza ricorsi semplicemente ai due nicol incrociati e a un fascio di luce solare illuminante una fenditura. Il campo luminoso si illuminava vivamente all'eccitazione delle correnti di Duddel, e allora si osservava con un cannocchiale, su uno specchio girante, l'immagine della fenditura.

Questa appariva, per la rotazione dello specchio, come un nastro luminoso, solcato da tante linee nere sottili, equidistanti, parallele alla fenditura; dimostrando così che negli istanti in cui il campo passava per zero s'annullava la birifrangenza: e ciò tanto pei liquidi negativi che pei positivi.

Adunque fino alla frequenza di 1500 periodi, cui corrispondono 3000 annullamenti del campo al minuto secondo, possiamo asserire che la birifrangenza si annulla anch'essa periodicamente.

Un'ultima ricerca fu fatta ricorrendo alle correnti interrotte con l'apparecchio di Wehnelt. Fu adoperata allo scopo un'elettrocalamita anulare più grande, circa due volte e mezza, ma avente il medesimo interfero, e due

strati di filo più grosso. Così si poterono raggiungere valori del campo notevolmente più alti.

L'interruttore era costituito da un tubicino di vetro con un sottile filo di platino sporgente circa mezzo centimetro. Si ebbero così circa 1500 interruzioni al secondo con intensità di corrente non troppo elevate; e fu possibile ottenere che la durata totale dell'interruzione fosse inferiore a $\frac{1}{10}$ dell'intero periodo.

Il campo si annullava in un tempo che poté essere stimato di circa $\frac{1}{20,000}$ di secondo, e dopo risaliva in un tempo dello stesso ordine al valore primitivo.

Ricorsi allo stesso dispositivo ottico adoperato nella esperienza precedente. E anche qui allo specchio girante venne osservato un nastro luminoso con delle righe nere equidistanti abbastanza sottili, cosicchè anche in questo caso la birifrangenza si annullava nel brevissimo tempo in cui il campo raggiungeva il valore zero.

Questo risultato fu ottenuto coi liquidi negativi e coi positivi; cosicchè possiamo concludere che la birifrangenza magnetica del ferro Bravais, negativo o positivo, segue le vicissitudini del campo con un ritardo inferiore a $\frac{1}{20,000}$ di secondo; ovvero che: sopprimendo bruscamente il campo magnetico orientatore, le particelle cui è dovuta la birifrangenza (anche le più grosse) riprendono l'orientazione normale in un tempo inferiore a $\frac{1}{20,000}$ di secondo.

Ora i signori Cotton e Mouton, nella loro Memoria citata, avanzano l'idea che la forza la quale si oppone all'orientazione magnetica dei granuli risieda nel loro vivace movimento browniano; d'altra parte risulterebbe dalle loro osservazioni che le particelle più grosse, cui spetta la birifrangenza positiva, avrebbero già dimensioni microscopiche. Esaminerò in una altra Nota fino a che punto queste due idee siano tra loro conciliabili.

Fisica. — *Sulle forze quasi-elastiche dovute ai movimenti browniani.* Nota di O. M. CORBINO, presentata dal Socio P. BLASERNA.

Fisica. — *Sulla natura delle particelle ultramicroscopiche che intervengono nel fenomeno Majorana, e su un nuovo metodo di studio del campo magnetico.* Nota di MARIO TENANI, presentata dal Corrispondente A. BATTELLI.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Di un nuovo coltro dinamometrico per la determinazione di alcune caratteristiche fisico-meccaniche del terreno.* Nota del prof. FEDERICO GIORDANO, presentata dal Socio G. KÖRNER.

Chimica. — *Eteri fosforici di alcuni alcoli polivalenti e di alcuni idrati di carbonio.* Nota di ANGELO CONTARDI, presentata dal Socio G. KÖRNER.

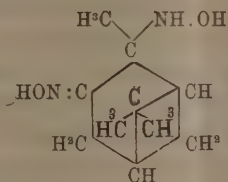
Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Isonitramminossima dell' α -pinene e suoi prodotti di decomposizione* ⁽¹⁾. Nota di GUIDO CUSMANO, presentata dal Corrispondente A. PERATONER.

In continuazione di un mio studio intorno al comportamento delle idrossilammine ed idrossilamminossime di fronte all'acido nitroso ⁽²⁾, esporrò in questa Nota i risultati ottenuti dal nuovo tipo delle orto-idrossilamminossime che da poco tempo ho fatto conoscere ⁽³⁾.

Non tutti i composti del tipo stesso reagiscono con l'acido nitroso; così, per es. fra quelli descritti finora, i derivati del limonene rimangono passivi, mentre i derivati del pinene e dell'amilene forniscono prodotti ben caratterizzati.

Sulla idrossilamminossima dell' α -pinene



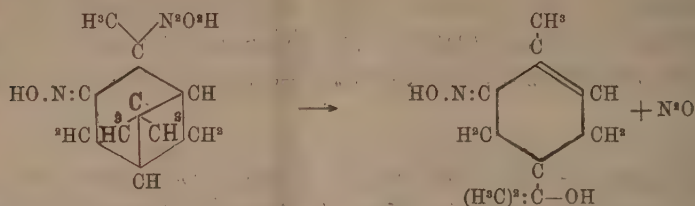
l'acido nitroso reagisce da prima solamente con il gruppo ossamminico. L'isonitrammina, che si ottiene, è un corpo cristallino abbastanza stabile. A secco si decompone profondamente solo a 127°. Sospesa nell'acqua, invece, basta

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Cagliari.

⁽²⁾ Gazz. Chim. ital. 39, II, 453.

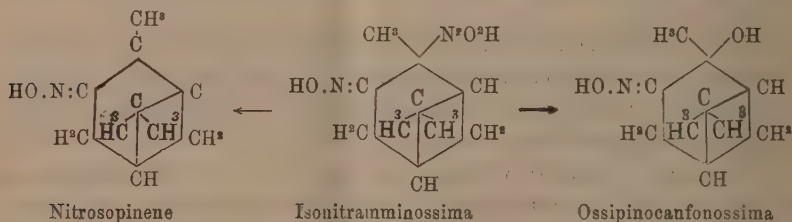
⁽³⁾ Gazz. Chim. ital. 40, I.

riscaldare a b. m. per scinderla quantitativamente in ossidiidrocavossima (1) e ossidulo d'azoto:



Agli stessi risultati si giunge mediante l'acido acetico diluito.

Gli alcali, invece, agiscono diversamente: anche essi provocano la decomposizione con grande facilità e forniscono l'ossidulo d'azoto, ma danno simultaneamente nitrosopinene e un prodotto di sostituzione del gruppo isonitramminico con l'ossidril, cioè l'ossima del pineneidrato (ossipinocanfonossima) finora sconosciuta. Poichè da quest'ultima non si ottiene, per disidratazione, il nitrosopinene, è da ritenere che la decomposizione mediante gli alcali segua due vie indipendenti:



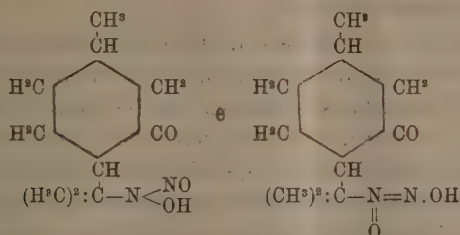
L'ossima del pineneidrato, tuttavia, è probabilmente anche il primo prodotto dell'azione degli *acidi diluiti* sull'isonitramminossima; difatti, gli acidi più deboli e diluiti (acetico, iponitroso) la *trasformano quantitativamente*, già a freddo, nell'ossidiidrocavossima.

Come si è visto, l'isonitramminossima, cimentata nelle varie condizioni, espelle sempre il gruppo isonitramminico integralmente allo stato d'acido iponitroso e rispettivamente d'ossidulo d'azoto e acqua.

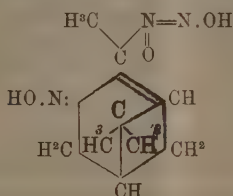
Ora, nella prima Nota già ricordata, ho mostrato che l'isonitrammina del pulegone (8-isonitrammino-mentone) invece si decompone in due modi: o *spontaneamente*, eliminando in prima fase acido nitroso, il quale poi determina una serie di reazioni, che in definitiva conducono all'8-ossi-, all'8-nitro e all'8-nitrosomentone, acqua e azoto; o, *per azione degli alcali*, scindendosi semplicemente in 8-ossimentone, ossidulo d'azoto ed acqua.

(1) Questo composto è stato ottenuto da Wallach (Ann. 291, 347 e 356) dal bisnitrosocloruro del terpineolo α , eliminando acido cloridrico con gli alcali; e, inoltre direttamente dall'ossidiidrocavone.

La causa di questi due modi di decomposizione della detta isonitrammina, ritenevo doversi riportare alla possibilità di agire secondo le formole tautomeriche:



di cui la prima spiegherebbe meglio l'eliminazione dell'acido nitroso e la seconda quella dell'acido iponitroso. In seguito a ciò, se si accetta quella mia ipotesi, l'isonitramminossima del pinene, eliminando sempre acido iponitroso, manifesterebbe attitudine a reagire preferibilmente nella forma:



PARTE SPERIMENTALE.

Isonitramminossima dell' α -pinene.

Questo composto si ottiene, facendo gocciolare una soluzione acquosa di nitrito sodico, su una soluzione acquosa, fortemente raffreddata, del cloridrato o del solfato dell'o-idrossilamminossima dell' α -pinene. Se non si hanno a disposizione i sali, bisogna disciogliere la base nella quantità calcolata dell'acido diluito, poichè un eccesso di questo provocherebbe la decomposizione del prodotto ricercato. Questo si forma piuttosto lentamente e, operando nelle condizioni adatte, si separa cristallino e quasi puro; in condizioni meno favorevoli, pastoso: in quest'ultimo caso, però, presto indurisce. Dalle acque madri, per mezzo dell'etere si estraggono piccole quantità di ossidiidrocavossima. L'isonitramminossima, che si ha con rendimento circa teorico, cristallizza bene dall'etere o da miscugli di questo ed etere di petrolio; e si presenta in grossi prismi incolori, i quali tuttavia, con il tempo divengono un po' rosei. Fonde decomponendosi a 127°.

Analisi: sost. gr. 0,2230; CO² gr. 0,4297; H²O gr. 0,1565.

	Trovato %	Calcolato per C ¹⁰ H ¹⁷ O ² N ²
C	52,56	52,79
H	7,79	7,55

Il composto è molto solubile in alcool, anche a freddo; abbastanza in etere a caldo; quasi insolubile in ligroina. Si scioglie nei carbonati alcalini; dà la reazione di Liebermann; la sua soluzione alcoolica viene colorata in rosso vinoso dal cloruro ferrico.

Sale sodico. — Si ottiene trattando una soluzione alcoolico-eterea dell'isonitrammina con quantità equimolecolare di alcoolato sodico: forma una polvere, che riscaldata, si decompone con violenza a 92-95°. Assai solubile in alcool e in acqua, nelle cui soluzioni si altera con facilità.

Sale d'idrossilammina. — Mescolando due soluzioni equimolecolari alcoolico-eteree dell'isonitrammina e d'idrossilammina, si separa subito una massa molle, voluminosa. In breve tempo però, questa si sgretola in una polvere cristallina bianca, che fonde decomponendosi, a 110°. Si può avere in cristalli prismatici lucenti, sciogliendola a caldo in alcool assoluto e aggiungendo, poi, etere. Riduce il liquido di Fehling a freddo: dà appena la reazione di Liebermann; scaldata in soluzione acquosa si altera.

Analisi: sost. gr. 0,2284; CO² gr. 0,3909; H²O gr. 0,1671.

	Trovato %	Calcolato per C ¹⁰ H ¹⁷ O ³ N ³ + H ² N.OH
C	46,67	46,09
H	8,12	7,72

Decomposizione dell'o-isonitramminossima dell'α-pinene.

a) Per riscaldamento con acqua. — Si sospende in acqua la sostanza ben polverizzata e si riscalda a b. m. in un palloncino munito di tubo di sviluppo; non appena il bagno giunge presso all'ebollizione, la decomposizione comincia. Si sviluppa rapidamente un gas che viene raccolto sul mercurio; intanto, la sostanza in parte si discioglie, in parte si separa come olio. Si riscalda sino al cessare dello sviluppo gassoso; ciò che operando su un gr. di sostanza, avviene dopo circa una mezzora.

Si ottengono circa 115 cc. di gas a 0° e 760 mm., costituito interamente da ossidulo d'azoto. Per una decomposizione quantitativa se ne calcolano cc. 129.

Nel palloncino, con il raffreddamento, dalla soluzione acquosa e dalla parte oleosa cristallizza una notevole quantità di ossidiidrocavossima pura fus. a 133-134°. La sua identità con il composto avuto per altra via da Wallach (loc. cit.), oltre che per i caratteri fisici e chimici, ho anche provato mediante l'identità dei semicarbazoni ottenuti da quell'A. direttamente dall'ossidiidrocavone, e da me, trasformando da prima l'ossima stessa con acido nitroso in pernitroso derivato e facendo, poi, agire su questo la semicarbazide, con il metodo di Rimini (¹) per passare dai pernitroso composti ai semicarbazoni.

(¹) R. A. L. [5], 91, 212.

La decomposizione con acqua a caldo non dà altri prodotti, oltre ai suddetti.

b) Per azione dell'acido acetico diluito. — La decomposizione descritta si può avere anche a freddo, mediante l'acido acetico diluito; senonchè essa procede allora con grande lentezza. Occorrono alcuni giorni per demolire gr. 0,5 d'isonitramminossima; però l'ossidulo d'azoto si elimina quantitativamente perchè se ne ottengono cc. 64 circa, mentre se ne calcolano cc. 64,5 (a 0° e 760 mm.).

L'acido acetico in soluzione acquosa al 20 %, per riscaldamento a b. m. scinde quantitativamente l'isonitramminossima ancora in ossidulo d'azoto e ossididrocavossima; accanto a questa, tuttavia, si nota una piccola quantità di carvossima.

c) Per azione degli alcali a caldo. — Riscaldando a b. m. gr. 1 del sale sodico dell'isonitrammina, in soluzione d'alcool metilico o di acqua si sviluppano cc. 128 di gas misurato a 0° e 768 mm. riconoscibile per ossidulo d'azoto; esso si elimina in quantità corrispondente al teorico, che si calcola cc. 129. Dalla soluzione alcoolica o acquosa, precipita mediante aggiunta di molt'acqua, una sostanza pastosa che, distillata in corrente di vapore, fornisce una notevole quantità di *nitrosopinene* puro. Ciò che rimane nel pallone, della pasta suddetta, è insolubile negli acidi e negli alcali, fonde tra 70° e 80° e non si riesce a far cristallizzare.

La soluzione primitiva, da cui si separa la sostanza pastosa, si tratta con acido carbonico e si concentra a b. m., essa allora separa pochi cristalli di *ossi-pinocanfonossima*, prodotto che verrà in seguito descritto.

d) Per azione degli alcali a freddo. — Il rendimento dell'ossi-pinocanfonossima migliora notevolmente, se la decomposizione dei sali alcalini dell'isonitrammina si fa avvenire in soluzione acquosa a temperatura ordinaria.

In questo caso, però, lo sviluppo dell'ossidulo d'azoto dura alcuni giorni, e inoltre, si arresta, o diviene lentissimo, presso ai due terzi della quantità calcolata. Se, allora, si procede alla separazione dei prodotti della reazione con il processo indicato sotto c), si nota che la quantità del nitroso pinene è grandemente diminuita; si forma ancora in quantità la sostanza fus. 70°-80° (che, come ho detto, non è stata per ora ulteriormente studiata) e infine si ha circa il 20 % dell'isonitramminossima impiegata, come

Orto-ossi-pinocanfonossima

la quale costituisce il prodotto più interessante della reazione. Il composto grezzo si presenta in lamine rombiche lucenti trasparenti e fonde a 124-125°. Si purifica mediante cristallizzazione da miscugli di etere etilico ed etere di petrolio: da essi si separa in bellissimi prismi rombici, liberi e fonde allora a 128°, rammollendosi qualche grado prima.

Analisi: sost. gr. 0.2153; CO² gr. 0.5186; H²O gr. 0.1843.

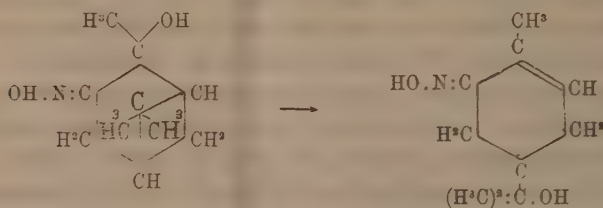
	Trovato	Calcolato per C ¹⁰ H ¹⁷ O ² N
C	65.68	65.49
H	9.51	9.37

Il composto rassomiglia alquanto nel comportamento al suo isomero, l'ossidiidrocavossima; difatti, come questo è facilmente solubile in alcool, etere, acqua, come pure in idrato sodico al 5 %; però, si discioglie più lentamente in HCl al 10 %, in cui si decompone separando idrossilamina.

È stabile di fronte agli alcali: difatti si può riscaldare lungamente in soluzioni acquose o alcooliche a diversa concentrazione di idrati alcalini e riaverlo totalmente inalterato, mediante l'acido carbonico.

Invece, dagli *acidi* è subito attaccato con risultati diversi: come è detto innanzi, nell'acido cloridrico, anche a freddo, perde il gruppo ossimico, sviluppando odore mentaceo.

L'acido acetico diluito rispetta il gruppo ossimico, ma trasforma integralmente l'o-ossi-pinocanfonossima in ossi-diidrocavossima.



Difatti, se si riscalda a b. m. una soluzione della prima in acido acetico al 15 %, circa, dopo qualche minuto la soluzione stessa intorbida; e allora con il raffreddamento separa gocce oleose, le quali in breve tempo cristallizzano. Il prodotto così ottenuto, come pure quello che si ha per svaporamento della soluzione acetica, cristallizza da miscugli di etere e ligroina in prismetti allungati riuniti in ciuffi, che fondono a 133-134° e conservano questo punto di fusione anche se mescolati con ossidiidrocavossima; al contrario, lo abbassano a 98-100°, se mescolati con l'ossipinocanfonossima, da cui si originano.

Agli stessi risultati si giunge, lasciando per qualche ora a freddo l'ossipinocanfonossima in soluzione concentrata d'acido ossalico.

Chimica. — *Sui composti ossigenati del fluoro* (¹). Nota III di G. GALLO, presentata dal Socio G. PATERNÒ.

In continuazione alla mia Nota pubblicata in questi Rendiconti (vol. XIX, serie V, I sem., fasc. 5°), sopra un tentativo di preparazione dei composti ossigenati del fluoro, riferisco nella presente il risultato definitivo di un'altra serie di esperienze sullo stesso argomento.

Nella mia Nota precedente avevo riferito come dopo pochi minuti dacchè il fluoro, insieme coll'ossigeno, aveva incominciato a penetrare nel tubo ozonogeno, che era sottoposto all'azione delle scariche oscure, avvenne un'eplosione che mi provocò la rottura del matraccio successivo al tubo ozonogeno stesso, e fece saltare in aria il tappo di zolfo del mio apparecchio a produzione del fluoro.

Sebbene, come avevo fatto rilevare nella Nota succitata, sia da escludere che l'idrogeno che si sviluppa al polo negativo del mio apparecchio, possa essere penetrato nello spazio anodico, e da questo nel tubo ozonogeno, arrivando così in contatto col fluoro, e coll'ossigeno, pure, allo scopo di eliminare completamente questa possibile causa di errore, ho creduto opportuno di modificare l'esperienza nel senso, di preparare prima a parte una certa quantità di fluoro, e di farlo quindi arrivare, insieme coll'ossigeno, nel tubo ozonogeno, sottoposto all'azione delle scariche oscure.

A tale scopo ho preparato nuovamente dell'acido fluoridrico anidro, per decomposizione di circa 1 kg. di fluoridrato potassico secco, e sottoposi l'acido stesso, in presenza di fluoridrato potassico, all'elettrolisi nel mio apparecchio (²).

Questo, come il solito, era immerso in cloruro di metile, in tranquilla ebollizione a -25, ed inoltre dello stesso cloruro di metile, avevo riempito il manicotto sovrastante, contenente i due serpentini, per lo sviluppo dello idrogeno da una parte e del fluoro dall'altra. La corrente impiegata, fu ancora di 40 Volt, e 2-3 Amp.

Il fluoro che si svolgeva al polo positivo, veniva fatto passare per un tubo di rame, lungo 30 cm., e contenente del fluoruro sodico secco, allo scopo di trattenere le ultime tracce di acido fluoridrico. Allorquando da questo tubo, incominciò a svolgersi una corrente regolare di fluoro, riconoscibile all'odore, e per il fatto che carbonizzava il sughero, ed accendeva del silicio cristallizzato, fissai a perfetta tenuta l'estremità del tubo di rame,

(¹) Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica applicata della R. Scuola degli Ingegneri di Roma.

(²) G. Gallo, Rendiconti della R. Accad. Lincei, vol. XIX, serie V, fasc. 4°.

entro un tubo di vetro, munito di rubinetto, e che faceva parte di un tappo di vetro che chiudeva a smeriglio una bottiglia di Mariotte, del volume di 3 litri circa, e ripiena di anidride carbonica.

La bottiglia e le altre parti in vetro, erano state dapprima lavate ed asciugate molto accuratamente, poichè la minima traccia di sostanza organica, o di umidità, fornisce col fluoro, dell'acido fluoridrico, che intacca il vetro.

L'anidride carbonica era stata pure depurata, e disseccata prima con acqua, poi con acido solforico concentrato, e quindi con anidride fosforica.

Il tappo inferiore della bottiglia di Mariotte pure in vetro, si allungava all'esterno in un tubo di vetro, munito di rubinetto, e terminante con un tubetto di platino a punta. Aprendo con precauzione questo rubinetto, si provocava una leggera aspirazione alla parte superiore della bottiglia, e così, per spostamento, arrivai in breve a riempire con fluoro la bottiglia. Allorquando all'estremità di platino del tubo di vetro inferiore, ottenni un gas che accendeva il silicio a freddo, sospesi l'operazione, e chiudendo i due rubinetti potevo disporre di circa 3 litri di fluoro ⁽¹⁾.

Per eseguire l'esperienza ricorsi quindi allo stesso apparecchio descritto nella mia precedente Nota, colla sola differenza che nel matraccio successivo al tubo ozonogeno, introdussi circa 10 gr. di idrato potassico puro, fuso di recente in crogiuolo di argento allo scopo di fissare l'eventuale composto che si fosse potuto formare; inoltre presi le necessarie precauzioni per evitare il pericolo di un'esplosione in cui ero corso nell'esperienza precedente, circondando tutto l'apparecchio con una gabbia metallica.

Disposte così le cose, adattai il tubo superiore della bottiglia di Mariotte ad uno dei tubi adduttori nell'apparecchio generatore di ozono, mentre collegai il tubo situato alla parte inferiore della bottiglia stessa, coll'apparecchio di svolgimento di anidride carbonica, depurata come sopra, ed in modo che gorgogliassero circa 60 bolle di gas per minuto. Contemporaneamente feci arrivare nel tubo ozonogeno una corrente ugualmente lenta di ossigeno, depurato e disseccato nello stesso modo. Dopo alcuni minuti misi in azione il rocchetto di Ruhmkorff, facendo scoccare la scarica silenziosa fra le due armature metalliche.

Dopo 4 o 5 minuti dall'inizio dell'esperienza, una esplosione si ripeté nell'interno del tubo, la quale ancora ebbe per risultato di mandare in pezzi il matraccio contenente l'idrato potassico, e di fare uscire con forza i tappi dalla bottiglia di Mariotte. I piccoli pezzi di idrato potassico, che ho potuto raccogliere subito dopo l'esplosione, non diedero alcuna delle reazioni caratteristiche di un composto ossigenato del fluoro, analogo all'ipoclorito, con un sale di nichel e di cobalto.

(¹) Il vetro della bottiglia divenne leggermente iridescente in qualche punto.

Resta però confermato quanto avevo riferito precedentemente; cioè, che per azione della scarica oscura, deve aver luogo la formazione di un composto endotermico estremamente instabile fra l'ossigeno ozonizzato, ed il fluoro; nello stesso tempo ho dovuto convincermi, che pur troppo era impossibile, nelle condizioni della mia esperienza, poter fissare il composto stesso, qualunque esso sia.

Sento il dovere di porgere pubblicamente i miei più vivi ringraziamenti al chiarissimo prof. Paternò, che mise a mia disposizione tutti gli apparecchi di platino necessari alla preparazione dell'acido fluoridrico anidro, ed al chiarissimo prof. G. Giorgis, che mi ha permesso di disporre largamente di tutti i mezzi che il nostro laboratorio poteva offrire, per compiere queste lunghe e costose ricerche che furono continuate per circa tre anni.

Chimica. — *Sulla precipitazione dell'acido arsenico col molidato ammonico.* Nota di G. MADERNA, presentata dal Socio R. NASINI.

Chimica. — *Il sistema ternario rame-antimonio-bismuto.* Nota di N. PARRAVANO e E. VIVIANI, presentata dal Socio PATERNÒ.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Petrografia. — *La melilite negli inclusi delle lave etnee* ⁽¹⁾. Nota preliminare del dott. FR. STELLA STARRABBA, presentata dal Corrispondente G. DE LORENZO.

Nelle lave etnee delle ultime grandi eruzioni del 1886, del 1892 e del 1910 ed in quelle della piccola corrente originatasi durante l'eruzione abortita del 1883, è assai frequente la presenza di inclusioni di natura differente, allogene, che devono considerarsi come frammenti di rocce sedimentarie o cristalline strappate e coinglobate dalle lave medesime durante il loro passaggio attraverso i terreni che formano la base del grande vulcano siciliano. Le più frequenti di tali inclusioni sono le quarzose, delle quali per la prima volta si ha notizia nei lavori di Silvestri ⁽²⁾ intorno all'eruzione del

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Geografia fisica della Università di Napoli.

⁽²⁾ O. Silvestri, *Sopra una specie di quarzite semivetrosa a struttura pomiceo-granulare contenuta nell'interno di alcune bombe progettate dall'Etna nell'eruzione del marzo 1883.* Atti dell'Accad. Gioenia, ser. III, vol. XVI, Catania, 1883 e *Sull'esplosione eccentrica dell'Etna avvenuta il 23 marzo 1883.* Catania, 1884.

1883 e in quello di G. Basile ⁽¹⁾ sulle tombe dell'Etna; quelle delle lave del 1886 e del 1892 furono anche studiate da L. Dupare e L. Mrazec ⁽²⁾ e sono menzionate nella Memoria del Lacroix ⁽³⁾ sugli inclusi delle rocce vulcaniche. Ma oltre di queste rocce essenzialmente silicee e che possono interpretarsi come brani di arenarie, forse provenienti dai depositi eocenici della base dell'Etna, alterate dall'azione termica delle lave, in quantità molto più scarsa se ne trovano altre che constano di calcare assai alterato e qualcuna ancora di scisti silicei alternanti con straterelli di calcare più o meno marnoso. In questo ultimo genere di inclusi la parte calcareo-marnosa ha subito una vera cottura, producendo una visibilissima serie di alterazioni nella disposizione degli straterelli degli scisti ed anche numerose fratture.

Nella superficie di contatto fra queste parti calcaree e lo scisto siliceo si osservano delle listerelle e vene minuscole di una sostanza cristallina bruna, che cogli acidi minerali, anche abbastanza diluiti, gelatinizza facilmente. Nella soluzione s'è riscontrata coi soliti metodi la presenza dell'alluminio, del ferro, del calcio e del magnesio. Dove esiste qualche vacuo della roccia le pareti si mostrano tappezzate da numerosi cristallini bruni, poco splendenti, di forma apparentemente esaedrica e strettamente addossati gli uni agli altri. Le misure goniometriche hanno stabilito che le diverse facce formano tra loro angoli praticamente uguali a 90°. I cristallini più grandi, che misurano circa 1 mm. di lato, sono assai poco trasparenti, alcuni anzi quasi opachi; i più piccoli hanno una trasparenza maggiore e possono essere senz'altro studiati al microscopio. L'esame ottico subito dimostra che essi appartengono al sistema tetragonale e che risultano dalla combinazione delle due forme {100} e {001}. Su (100) si ha estinzione retta e si osservano alcune tracce di sfaldatura secondo la base; in luce convergente i cristalli poggiati sulla base si appalesano otticamente uniassici, negativi, con debole birifrangenza. La densità determinata col metodo della sospensione in alcuni frammentini, la purezza dei quali fu controllata al microscopio, è 2,934; la durezza è 5,5. Per questo complesso di caratteri si tratta, dunque, evidentemente, di *melilite*, minerale finora non riscontrato nella regione etnea. Sarebbe stato mio vivo desiderio di procedere ad un'analisi chimica quantitativa della nuova melilite etnea, tanto più che la costituzione di questo minerale è ora di nuovo incerta, dopo che i recenti studi del prof. Zambonini ⁽⁴⁾ hanno dimostrato che, almeno per le meliliti naturali, le idee di J. H. L.

⁽¹⁾ G. Basile, *Le bombe vulcaniche dell'Etna*. Atti Accad. Gioenia, ser. III, vol. XX, 1888, pag. 48.

⁽²⁾ L. Dupare et L. Mrazec, *Sur quelques bombes de l'Etna provenants des éruptions de 1886 et 1892*. Arch. Sc. Phys. et Nat., 1893, vol. XXIX, n. 3.

⁽³⁾ A. Lacroix, *Les enclaves des roches volcaniques*. Macon, 1893, pag. 40.

⁽⁴⁾ F. Zambonini, *Ueber eine krystallisirte Schlacke der Seigerhütte bei Hettstedt*,

Vogt ⁽¹⁾, secondo le quali questo minerale dovrebbe considerarsi come una soluzione solida di gehlenite ($R_3^{\text{II}} R_2^{\text{III}} \text{Si}_2 \text{O}_{10}$) e di åkermanite ($R_4^{\text{II}} \text{Si}_3 \text{O}_{10}$), sono insostenibili. Ma ho dovuto rinunciare al mio desiderio, perchè la melilite dell'Etna non solo è stata, finora, rinvenuta in quantità assai piccola, ma è per giunta anche parecchio impura. Essa infatti è in buona parte rivestita e compenetrata da sostanza calcarea, che è pressochè impossibile eliminare, perchè gli acidi anche diluiti, che la sciolgono, intaccano pure la melilite, e l'acido clorico, che fu adoperato con successo dal Weinschenk ⁽²⁾ per liberare dalla calcite la sua Fuggerite, non risponde allo scopo, perchè nel nostro caso si ha da fare con un calcare impuro, incompletamente decomposto dal suddetto acido.

Inoltre la nostra melilite contiene anche abbondanti inclusioni, specialmente di vetro bruno, che riesce difficile separare anche ricorrendo ai liquidi pesanti.

Rimandando ad un altro lavoro più esteso la descrizione microscopica degli interclusi nei quali ho osservato la melilite, credo opportuno far sin da ora notare che questo minerale rappresenta evidentemente nel nostro caso un prodotto di contatto, risultante dalle reazioni dei calcari e degli scisti colle lave che li hanno inclusi. Sembra però che l'azione di queste ultime sia stata principalmente termica e solo pochissimo chimica. Molta analogia colla nostra melilite presenta, dal punto di vista della formazione, un prodotto dei forni da cemento Portland di Nienburg a. d. Saale, studiato da G. Bodländer ⁽³⁾ e che è formato, in gran prevalenza, da una melilite, la quale però è otticamente positiva, al contrario di quella etnea, che, come la maggior parte delle meliliti naturali, è negativa. Quanto alla formazione si noti che per la melilite del forno da cemento si trovavano a reagire da un canto il miscuglio di calcare ed argilla, in tali proporzioni da aversi a fine di cottura un prodotto anidro col 60 % di ossidi RO, il 14 % di $R_2 \text{O}_3$ ed il 23 % di SiO_2 e dall'altro canto i mattoni delle pareti del forno con una percentuale di SiO_2 superiore in media a 75 % e col 5-30 % di $\text{Al}_2 \text{O}_3$. Anche in quest'incluso la melilite si è formata al contatto fra la parte calcareo-marnosa e lo scisto siliceo pirossenico, e quindi notevolmente allumoferrifero.

nebst Bemerkungen über die chemische Zusammensetzung des Melilith. Zeitschr. für Kryst. XLI B., 3H.

⁽¹⁾ J. H. L. Vogt, *Beiträge zur Kenntniss der Mineralbildung in Schmelzmassen und in den neovulkanischen Ergussgesteinen.* Archiv for Math og Naturvid. Kristiania, 1890, 30.

⁽²⁾ E. Weinschenk, *Fuggerit, ein 'neues Mineral aus dem Fassathal.* Zeitschr. für Kryst. 1897, XXVII, 577.

⁽³⁾ G. Bodländer, *Entstehung von Melilith beim Brennen von Portland-Cement.* Neues Jahrb. für Min. usw. Jahrg. 1892, I B., 53.

Una formazione analoga si ha in un incluso calcareo in un basalto di Ebsdorfer Grundes presso Marburg (Nassau), descritto da F. A. Hoffmann ⁽¹⁾. In tale incluso (di modestissime dimensioni, non superando i 3 mm. di diametro), in mezzo ad una corona di microliti pirossenici, si trovano immersi in una sostanza grigio-bruna, torbida e vetrosa dei cristalli tetragonali, interpretati da Hoffmann, per essere otticamente uniassici e negativi, con molto debole birifrangenza, come gehlenite. Ma essendo quest'ultimo minerale $\text{Ca}_3(\text{AlO})_2\text{Si}_2\text{O}_8$ relativamente purissimo ed essendo quindi assai difficile rinvenirlo, specialmente nel caso di una inclusione, ed essendo inoltre assai affine chimicamente alla melilite, la quale presenta altresì quasi i medesimi caratteri ottici, io sono indotto a credere doversi la gehlenite di Hoffmann riferire alla melilite, anche per analogia cogli inclusi etnei, piuttosto abbondanti di questo minerale.

Mineralogia. — *Osservazioni sui minerali delle Cave di pietra ollare al Sasso di Chiesa* (Val Malenco). Nota di L. MAGISTRETTI ⁽²⁾, presentata dal Corrispondente ETTORE ARTINI.

Ideale di ogni alpinista che ami le sue montagne, è di conoscerle e farle conoscere.

Socio della Stazione Universitaria del C. A. I. che tanta opera di propaganda e di educazione alpinistica svolge nella classe studentesca, mi pare che ad Essa debba naturalmente dedicarsi questo piccolo studio di minerali alpini.

Le ricchezze mineralogiche della Valle Malenco e delle valli tributarie sono ormai in buona parte note; pure ebbi la fortuna, durante la scorsa estate, di imbattermi in un giacimento che per i minerali forniti merita di essere ricordato.

Voglio parlare dei cristalli di Apatite e di Ilmenite rinvenuti in una cava di recente attivata sopra Chiesa.

Nè l'uno, nè l'altro di questi minerali sono nuovi per la Val Malenco. Ma i cristalli di Apatite trovati in altri punti di essa (con Epidoto, Granato ecc.) non possono gareggiare con questi per nitidezza e numero di forme; e l'Ilmenite, se è conosciuta e comune in noduli inclusi qua e là nei talcoscisti e negli scisti cloritici della valle, non forma però altrove, che io sappia, cristalli così distinti e buoni.

⁽¹⁾ F. A. Hoffmann, *Petrographische Untersuchung der Basalte des Ebsdorfer Grundes bei Marburg*. N. Jahrb. für Min. etc., X BB., 1895-1896.

⁽²⁾ Lavoro eseguito nel Laboratorio di Mineralogia del Museo Civico di Storia Naturale in Milano.

La cava dove raccolsi questi minerali, è la più alta fra quelle situate sul versante Sud del Sasso di Chiesa e si può raggiungere direttamente salendo per il sentiero che dall'Hôtel guadagna le cave in esercizio. Superatele si raggiunge la cava in un quarto d'ora.

Oppure si può giungervi più comodamente dall'Alpe del Pirlo per le cave di pietra ollare contigue, proseguendo sul sentiero piano che conduce all'Alpe Giumellino (20 minuti circa).

La quota d'imbocco della cava, da confronti fatti colle quote delle cave sottostanti, credo poco diversa da 1700^m.

Del resto la topografia della località risulta chiara dal Foglio 523 *bis* (Chiesa) della Carta dell'Ist. Topografico Federale Svizzero (1897) su levata dell'Ist. Geografico Militare Italiano (1890).

La pietra ollare di questa cava (come osservai su un mucchio di materiale estratto) e di quelle più basse del medesimo gruppo è, per la natura dei minerali interclusi, ben distinta da quella di altre cave.

Infatti alle cave dell'Alpe Pirlo (levante della nostra) nello scisto cloritico sono disseminati abbondantemente cristalli di Pirite, e sono comuni l'Epidoto e la Titanite; il primo forma nitidi cristallini nei litoclasti, la seconda è in grandi individui (talora 2-3 cm.) tabulari giallo grigi interclusi. Nè manca la Magnetite talora in netti ottaedri.

Lo stesso si nota sulla pietra delle cave di Val Giumellino (ponente della nostra).

Nelle cave in questione, invece, non mi fu dato di osservare Pirite, Titanite e Epidoto se non d'importanza affatto secondaria; mentre prevalgono, incluse, la Magnetite e la Ilmenite; Magnetite in grossi noduli; Ilmenite in cristalli distintamente tabulari.

Là dove la roccia si presenta cavernosa o fessurata (cava alta) le pareti delle cavità sono rivestite abbondantemente da aggregati scagliosi o a rosetta di Clorite, fra i quali si annidano nitidi cristalli di Apatite limpida e magnifici cristalli tabulari di Ilmenite.

Con queste talora si presenta in piccoli individui prismatici l'Aragonite, che manca affatto alle cave dell'Alpe Pirlo e dell'Alpe Giumellino.

Nella cava immediatamente sottostante a quella in questione potei raccogliere qualche esemplare con cristalli di Granato e fascetti di cristalli prismatici di Vesuvianite. Esemplari poco appariscenti, specie al paragone degli ottimi esemplari della cava superiore. Li cito per dare un'idea della paragenesi dell'Apatite e della Ilmenite.

Riservandomi di dare presto in altro lavoro lo studio completo dei cristalli di Ilmenite raccolti in questa località, credo utile render note fin d'ora le mie osservazioni sulla Apatite e sui minerali che l'accompagnano.

Essi sono dunque:

Aragonite in XX limpidi racchiusi fra gli aggregati di Clorite. Essi

presentano un abito prismatico e si assottigliano talora verso l'estremità terminata. Altre volte sono piuttosto appiattiti e cuneiformi per grande sviluppo di due faccie di una bipiramide romba acuta non misurabile esattamente.

Granato. (Essonite) in XX trasparenti da giallo miele a color topazio carico. L'abito è rombododecaedrico. Notai faccette di icositetraedro.

Associata ad esso si trova, nella cava sottostante la studiata, *Vesuvianite* in fascetti di XX prismatici striati. Colore giallo bruniccio. Su alcuni frammenti del minerale notai: Birifrazione piuttosto debole; Estinzione parallela all'allungamento; Carattere ottico negativo. Su alcune sezioncine parallele alla base si osserva una figura di interferenza uniassica alquanto deformata.

La *Clorite*, che è in queste geodi il minerale più abbondante, si presenta in pile di lamelle curve o raggiate a ventaglio. Il contorno è spesso distintamente esagono. Le lamelle di sfaldatura basale presentano la nota struttura ottica a settori birifrangenti di diversa orientazione. La birifrazione è in generale abbastanza viva.

La bisettrice acuta (negativa) nella maggior parte delle lamine esce sensibilmente obliqua alla base. L'angolo degli assi ottici, pur variando da lamina a lamina, è abbastanza grande. In essenza di Cannella si constata che γ è sensibilmente maggiore di 1,586.

Questi caratteri coinciderebbero dunque abbastanza bene con quelli del Clinocloro.

È poi frequente il caso che l'angolo degli assi ottici diminuisca dalla periferia verso il centro della lamina, fino ad essere questa in questo punto quasi perfettamente uniassica.

Apatite. I cristalli di Apatite di questa località (di cui raccolsi e osservai un forte numero) sono per la maggior parte incolori e limpidi, raramente rivestiti da un leggero velo limonitico.

Essi non presentano grande varietà di aspetto, nè per diversità di forme semplici, nè per il diverso sviluppo di queste. L'abito è costantemente prismatico tozzo.

Mi pare che un carattere speciale di questa nostra Apatite sia la costante presenza di bipiramidi ottuse di III ordine ($\{21\bar{3}2\}$, talora $\{3142\}$).

La fig. 1, colla quale mi sono sforzato di rendere il vero aspetto dei cristalli, ne rappresenta l'abito più comune.

Meno frequente è l'abito presentato nella fig. 2; abito che osservai solo su tre dei cristalli raccolti.

Finalmente la fig. 3 rappresenta fedelmente un frammento di cristallo che pure osservai.

Le immagini fornite dalle faccie di questa Apatite sono buone e nette, così che mi parve opportuno misurarne un certo numero di spigoli nella attesa che una determinazione quantitativa di alogeni confermi le deduzioni che il valore della costante cristallografica mi permise di fare.

Il valore di questa (ricavato dall'angolo $(10\bar{1}1):(0001)$ misurato 28 volte e con buoni risultati è):

$$\frac{c}{a} = 0,728673.$$

Tale valore farebbe ritenere, secondo la teoria di Pusyrewsky ⁽¹⁾ confermata dal Baumhauer ⁽²⁾ che lega la costante cristallografica dell'Apatite

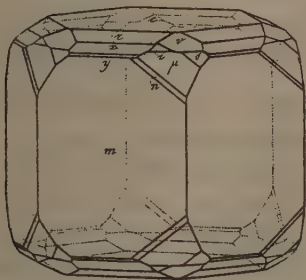


FIG. 1.

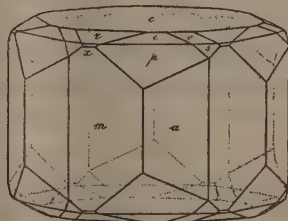


FIG. 2.

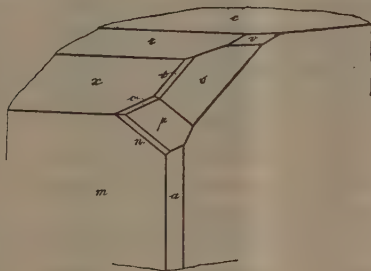


FIG. 3.

al suo contenuto in cloro; che la studiata sia una caratteristica clorapatite, appunto perchè il valore di

$$(10\bar{1}1):(0001) = 40^{\circ}4' \frac{4}{5}$$

è fra i minori osservati.

Tale Apatite si accosterebbe dunque a quelle di Achmatowsk, Rothenkopf, di Val di Ala e soprattutto a quella della C. Robert presso Avigliana studiata dal Boeris ⁽³⁾ alla quale l'Apatite di Chiesa si avvicina anche per la caratteristica analogia di giacimento con Granato, Vesuvianite, Ilmenite in roccia cloritica.

A conferma di tale ipotesi milita pure il peso specifico di

$$3,151$$

⁽¹⁾ Kokscharow, *Materialien zur Mineralogie Russlands*, V, 86.

⁽²⁾ Ueber die Winkelverhältnisse des Apatit von verschiedenen Fundorten. *Zeitschrift für Kryst. und Min.*, XVIII, 31.

⁽³⁾ G. Boeris, *Nuove osservazioni sopra i minerali della Comba di Compare Robert*. *Accad. Sc. Torino*, 1898-99.

ottenuto da vari frammenti purissimi con soluzione Klein. Questo valore si accorda bene con quelli

3,153 3,149

delle Apatiti di Sulzbach e di Rothenkopf.

Le forme osservate sui cristalli di questa Apatite sono:

$$\begin{array}{llll} c = \{0001\} & r = \{10\bar{1}2\} & v = \{11\bar{2}2\} & \mu = \{21\bar{3}1\} \\ m = \{10\bar{1}0\} & x = \{10\bar{1}1\} & s = \{11\bar{2}1\} & i = \{21\bar{3}2\} \\ a = \{11\bar{2}0\} & y = \{20\bar{2}1\} & n = \{31\bar{4}1\} & o = \{31\bar{4}2\} \end{array}$$

Faccio seguire una tabella di valori angolari osservati, messi a confronto coi calcolati partendo dalla costante da me determinata:

	Spigoli misurati		Limiti di osservazione	Valori osservati (medie)	Valori calcolati	N.
<i>m m'</i>	10 $\bar{1}$ 0	01 $\bar{1}$ 0	59°57'-60.23'	60.4'	60.00'	12
<i>m a</i>	10 $\bar{1}$ 0	11 $\bar{2}$ 0	29.58-30.29	30.5	30.00	6
<i>c x</i>	0001	10 $\bar{1}$ 1	39.46-40.28	40°4'.38"	*	28
<i>r c</i>	10 $\bar{1}$ 2	0001	22.10-23.15	22.49'	22.49	32
<i>r x</i>	10 $\bar{1}$ 2	10 $\bar{1}$ 1	17.00-17.33	17.13	17.15	18
<i>c s</i>	0001	11 $\bar{2}$ 1	55.8-55.48	55.30	55.31	16
<i>c v</i>	0001	11 $\bar{2}$ 2	35.50-36.49	36.2	36.4	11
<i>x s</i>	10 $\bar{1}$ 1	11 $\bar{2}$ 1	26.46-26.53	26.49	26.47	10
<i>s a</i>	11 $\bar{2}$ 1	11 $\bar{2}$ 0	34.11-34.25	34.20	34.27	7
<i>s μ</i>	11 $\bar{2}$ 1	21 $\bar{3}$ 1	13.56-14.26	14.1	13.58	9
<i>μ m</i>	21 $\bar{3}$ 1	10 $\bar{1}$ 0	30.14-30.33	30.21	30.27	14
<i>n m</i>	31 $\bar{4}$ 1	10 $\bar{1}$ 0	22.24-23.21	22.54	22.47	11
<i>n μ</i>	31 $\bar{4}$ 1	21 $\bar{3}$ 1	7.35-7.39	7.37	7.40	7
<i>y c</i>	20 $\bar{2}$ 1	0001	58.40-59.51	59.20	59.17	18
<i>v' m</i>	1 $\bar{2}$ 12	10 $\bar{1}$ 0	89.57-90.11	90.1	90.00	5
<i>y s</i>	20 $\bar{2}$ 1	11 $\bar{2}$ 1	25.26-25.29	25.27	25.27	3
<i>μ c</i>	21 $\bar{3}$ 1	0001	65.27-65.56	65.47	65.49	16
<i>s m</i>	11 $\bar{2}$ 1	10 $\bar{1}$ 0	44.19-44.28	44.23	44.26	19
<i>i s</i>	21 $\bar{3}$ 2	11 $\bar{2}$ 1	11.11-11.37	11.22	11.21	9
<i>i c</i>	21 $\bar{3}$ 2	0001	47.43-48.41	48.8	48.4	12
<i>i m</i>	21 $\bar{3}$ 2	10 $\bar{1}$ 0	45.18-45.43	45.24	45.20	5
<i>i μ</i>	21 $\bar{3}$ 2	21 $\bar{3}$ 1	17.31-17.53	17.44	17.45	8
<i>i x</i>	21 $\bar{3}$ 2	10 $\bar{1}$ 1	15.16-15.33	15.24	15.26	4
<i>n c</i>	31 $\bar{4}$ 1	0001	71.20-71.44	71.35	71.46	5
<i>n s</i>	31 $\bar{4}$ 1	11 $\bar{2}$ 1	21.29-21.37	21.34	21.38	6
<i>m v</i>	10 $\bar{1}$ 0	11 $\bar{2}$ 2	59.9-59.35	59.22	59.20	2
<i>v' x</i>	21 $\bar{1}$ 2	10 $\bar{1}$ 1	18.36-18.51	18.43	18.47	6
<i>r r'</i>	10 $\bar{1}$ 2	01 $\bar{1}$ 2	22.9-22.28	22.19	22.21	4
<i>μ μ'</i>	21 $\bar{3}$ 1	21 $\bar{3}$ 1	47.38-48.51	48.14	48.22	2

Fisiologia — *Modificazioni del ricambio respiratorio in dipendenza della temperatura* ⁽¹⁾. Nota di G. CRISTINA, presentata dal Corrispondente F. BOTTAZZI.

Tra i due principali prodotti delle combustioni organiche, i quali fanno parte del ricambio respiratorio, e cioè l'anidride carbonica e l'acqua, solo la prima è stata in modo esauriente studiata. Le determinazioni dell'acqua, che evapora dalla superficie polmonare, sono state invece assai scarse, principalmente per le difficoltà che in pratica presentano tali esperimenti, i quali a prima vista sembrerebbero così facili.

Per riguardo alla eliminazione dell'anidride carbonica a differenti temperature, citerò solo le ricerche più recenti di Abegg ⁽²⁾, che furono eseguite sulle rane, sui conigli e sui cani. Da esse risultò che i processi ossidativi che conducono alla formazione di CO², si intensificano con l'aumento della temperatura, in modo che il coefficiente di temperatura per l'eliminazione di questo prodotto di combustione resta nei limiti stabiliti dalla regola di Van't Hoff. Abegg trovò che questo coefficiente è

per le rane	2,0
per i conigli	1,9

Io ho voluto ripetere consimili esperimenti, unendo alle determinazioni dell'anidride carbonica espirata, determinazioni dell'acqua, che pure si trova nell'aria espirata.

A tal fine ho scelto un animale, in cui l'evaporazione cutanea è assai piccola, che raramente evacua feci ed orina, e che può restare per molte ore perfettamente immobile. Tali requisiti, come si può facilmente comprendere, erano indispensabili per l'esattezza degli esperimenti che mi ero proposto di fare, e tali appunto li ho trovati nello *Zamenis viridiflavus*.

METODO DI RICERCA.

L'animale, prima rinchiuso in un sacchetto di garza, era collocato sotto una piccola campana chiusa a tenuta d'aria, a mezzo di mastice di lacca, e questa campana veniva immersa in un bagno, che si portava alla temperatura voluta.

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Patologia Generale della R. Università di Napoli, diretto dal prof. Gino Galeotti.

⁽²⁾ Zeitschr. f. Elektrochemie, vol. XI, pag. 823 (1905).

L'aria destinata all'animale veniva insufflata nella campana mediante un apparecchio a caduta d'acqua, dopo che era passata attraverso una serie di boccie di lavaggio con soluzione di potassa e con H^2SO^4 concentrato e poi attraverso un lungo serpentino immerso nel bagno, ove l'aria si metteva in equilibrio di temperatura. La campana, contenente l'animale, portava nella parte superiore un tappo di gomma con tre fori, dei quali uno serviva per il termometro e gli altri due davano passaggio a due tubetti di vetro in accordo uno col sistema che forniva l'aria pura, l'altro col sistema destinato a raccogliere l'aria e l'acqua espirate dall'animale. L'acqua di espirazione era raccolta su cloruro di calcio, e l'anidride carbonica veniva fissata con soluzione di KOH, contenuta in una serie di palline di Mohr. Le determinazioni si facevano per pesata. Dopo che l'animale era stato introdotto entro la campana, si aspettava almeno 6 ore, sino a che la temperatura si fosse messa in equilibrio. I singoli esperimenti duravano 1-3 giorni. La temperatura al di sopra di 15° si otteneva, riscaldando il grande bagno-maria entro cui stava immersa la campana con l'animale. Gli esperimenti a 15° furono eseguiti, tenendo la campana immersa in una vasca ove affluiva una certa quantità di acqua fredda. Con questo semplice metodo si potè ottenere una temperatura di 15° con oscillazioni di mezzo grado. La pesata dei tubi a cloruro di calcio e delle bolle di Mohr furono fatte ogni 12 o 24 ore.

Gli animali restavano in completo digiuno.

Negli esperimenti a 30° si ebbero lievi perdite di H^2O , che si condensava nell'interno del tubicino di deflusso.

DESCRIZIONE DEGLI ESPERIMENTI.

Esperimento I. — *Zamenis* del peso di 139 gr. Si tiene in esperimento per circa 15 giorni, durante i quali si fanno 4 determinazioni alla temperatura di 15° , 20° , 25° , 30° . Alla fine dell'esperimento l'animale pesa 120 gr.

Riporto nella seguente tabella i risultati ottenuti:

Temperatura	Durata dell'esperimento	CO_2 eliminato durante l'esperimento in gr.	H^2O eliminata in gr.	CO_2 eliminato per ora in gr.	H^2O eliminata per ora in gr.	CO_2 eliminato per ora e per chilo di animale	H^2O eliminata per ora e per chilo di animale
$14^\circ,5$ a 15°	79 ore	0,2860	0,6122	0,0036	0,0077	0,0259	0,0554
20° a 21°	35 ore	0,3158	0,5338	0,0090	0,0152	0,0649	0,1093
26°	59 ore	0,6269	0,3470	0,0125	0,0069	0,0870	0,0498
30°	72 ore	2,0839	1,1808	0,0289	0,0164	0,2072	0,1179

Esperimento II. — Animale del peso di gr. 255. È tenuto in prigionia da circa 45 giorni e non ha preso cibo da questo tempo. Si tiene in esperimento per 15 giorni. Alla fine dell'esperimento pesa 220 gr. I risultati delle varie determinazioni sono riassunti nella seguente tabella:

Temperatura	Durata dell'esperimento	CO ² eliminato durante l'esperimento	H ₂ O eliminata durante l'esperimento	CO ² eliminato per ora e in grammi	H ₂ O eliminata per ora e in grammi	CO ² eliminato per ora e per chilo di animale	H ₂ O eliminata per ora e per chilo di animale
15°	49 ore	0,2976	0,2444	0,0060	0,0049	0,0235	0,0196
20°	29 ore	0,6064	1,2008	0,0209	0,0414	0,0819	0,1629
25°	50 ore	0,9226	1,2292	0,0184	0,0245	0,0836	0,1113
30°	57 ore	2,7624	2,2926	0,0484	0,0402	0,1898	0,1604

I risultati di questi esperimenti si possono così riassumere:

1) Per l'anidride carbonica i risultati delle determinazioni sono stati concordanti nei due esperimenti. La quantità di CO² eliminata per ora e kgr. di peso del corpo è stata in media:

a 15°	0,024
a 20°	0,073
a 25°	0,085
a 30°	0,198

Da queste cifre si vede anche, che la quantità di anidride carbonica eliminata aumenta uniformemente con il crescere della temperatura.

2) Il coefficiente della eliminazione dell'anidride carbonica in dipendenza della temperatura sta nei limiti della regola di Van't Hoff. Q₁₀ infatti assume i valori segnati nella seguente tabella:

	Intervallo della temperatura	Quantità di CO ² eliminata per ora alle due temperature precedenti	Q ₁₀
Esp. I	15° - 25°	0,0036 - 0,0119 ⁽¹⁾	3,3
	20° - 30°	0,0090 - 0,0289	3,2
Esp. II	15° - 25°	0,0060 - 0,0184	3,4
	20° - 30°	0,0209 - 0,0484	2,3

(¹) Valore ottenuto per interpolazione.

3) Per l'eliminazione dell'acqua non ho trovato nè concordanza tra i due esperimenti (nelle cifre riportate all'unità di peso degli animali), nè comportamento uniforme con le variazioni di temperatura; per quanto, anche in questo caso, si noti un certo aumento della eliminazione per ora, con il salire della temperatura; e questo fatto sta probabilmente in rapporto con l'affrettarsi degli atti respiratori negli animali riscaldati.

4) Mentre adunque l'eliminazione di uno dei prodotti delle combustioni organiche, cioè della anidride carbonica, obbedisce alla regola di Van't Hoff, l'eliminazione dell'altro prodotto che è l'acqua, è da questa regola indipendente. E si comprende che così debba essere, poichè l'eliminazione dell'anidride carbonica è la semplice espressione del fenomeno chimico delle combustioni organiche, mentre l'acqua, che dalle stesse combustioni si produce, si unisce all'altra acqua dell'organismo, nè per questo provoca una maggiore eliminazione dell'acqua stessa, di cui l'uscita è regolata da tanti altri più complessi meccanismi, indipendenti dalla respirazione. In altre parole, la quantità dell'acqua che si trova nell'aria espirata non ci può dare la misura dell'acqua, che si produce per le reazioni chimiche dell'organismo.

Viticultura. — *La vegetazione invernale delle viti a Catania.* Nota di F. SANNINO, presentata dal Socio G. CUBONI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Istologia. — *Studio istologico del bottone d'Oriente e dell'adenite sintomatica.* Nota del prof. U. GABBI e del dott. F. LA-CAVA, presentata dal Socio B. GRASSI.

1. *Esame del bottone.* — Nella clinica chirurgica di Roma venne estirpato il bottone d'Oriente al malato, del quale venne dato all'Accademia dei Lincei una comunicazione preliminare la prima domenica dello scorso aprile.

Il bottone estirpato in toto venne passato in sublimato alcoolico Schaudinn, poi nella serie degli alcool e quindi incluso in paraffina.

Le sezioni vennero colorate:

- a) con i metodi comuni: emallume eosina, ecc.;
- b) con i metodi di van Gieson e di Traina per il connettivo;
- c) col metodo di Weigert per la fibrina ed il tessuto elastico;
- d) col metodo di Giemsa — ultima modificazione — per i parassiti di Wright.

Ecco i risultati ottenuti:

All'esame delle sezioni si nota che lo strato superficiale è scomparso. Lo strato corneo appare in qualche punto rilevato con qua e là degli elementi cellulari e lievi grumi di fibrina.

Lo strato delle cellule reticolate appare in alcuni punti assottigliato, in altri inspessito ed è qui che si trova una infiltrazione di elementi cellulari rotondi.

Lo strato papillare appare rigonfio e così l'interpapillare. Nel reticolo Malpighiano appaiono i segni dell'infiltrazione edematosa; le cellule sembrano tumefatte e con contorni poco netti; il pigmento nelle cellule profonde non si osserva quasi affatto. Tanto i vasi che gli spazi linfatici appaiono dilatati e riempiti di numerosi elementi cellulari (linfociti) specie attorno ai follicoli dei peli. Le cellule dei follicoli sembrano presentare segni di riproduzione.

Nel connettivo sottocutaneo si osservano zone necrotiche ed in vicinanza di esse, meno raramente nel centro delle vere cellule giganti, le une con nucleo in geminazione, le altre con nuclei e frammenti di nuclei. Parassiti si osservano fra gli elementi cellulari e ad un attento esame qualcuno ne appare ripieno. Col metodo di Weigert lo stato elastico appare in qualche punto alterato.

Quanto ai vasi sanguigni si osserva in qualche tratto un restringimento in qualche altro una vera e propria oblitterazione la quale deve, come la flogosi, determinare necrosi delle corrispondenti zone di tessuto (capillarite oblitterante).

Le mentovate alterazioni istologiche sono identiche a quelle che furono già segnalate da Riehl prima di tutti, e poi da Unna, Leloir, Kuhn, Ullmann, Plehn e Jeanselme.

2. *Adenite sintomatica* (g. epitrocleare). — L'esistenza di una linfangioite e di una adenite più o meno cospicua nel bottone d'Oriente furono segnalate da tempo, ma solo Jeanselme ne ha fatto uno studio accurato. Per uno studio nosografico completo di questo, come di altri casi che trovammo in Calabria e Sicilia, estirpammo il ganglio epitrocleare (dott. Lacava) e ne esaminammo il succo e la lesione istologica.

Il ganglio un po' duro, lasciò gemere, spremuto, scarso succo col quale preparammo vari strisci che colorammo col Giemsa.

All'esame trovammo:

- a) presenza di numerosi parassiti di Wrigt in accumuli od isolati;
- b) cellule linfatiche a piccolo nucleo, poche a grosso nucleo e quasi nessuno conservante il protoplasma;
- c) qualche raro globulo rosso.

Non abbiamo trovato grandi cellule ripiene di Leishmanie che in numero assai lieve, ma pensiamo che esse dovettero essere presenti però di-

strutte dall'azione meccanica dello striscio. In un polinucleato trovammo pure presente la *Leishmania Wright*. Non fu dato di rinvenire negli strisci alcuna formazione a rosetta. Il parassita ha presentato le note caratteristiche, ma abbiamo notato che il blefaroblasto in qualche caso non presentava contorni netti.

Il *ganglio* venne fissato e colorato cogli stessi metodi usati per il bottone. All'esame delle sottili sezioni trovammo:

- 1) Aumento degli elementi cellulari della sostanza follicolare.
- 2) Tumefazione delle cellule endoteliali dei seni tra loro addossate, di rado disgiunte (*catarro dei seni*).
- 3) Grande ricchezza dei linfociti in arrivo.
- 4) Aumento lieve del connettivo delle maglie.

Nelle sezioni colorate col Giemsa non si osservarono che scarse *Leishmanie*. Non osservammo nè focolai emorragici, nè zone necrotiche.

Le nostre indagini istologiche confermano quelle del Jeanselme, l'unico che se ne sia occupato prima di noi. L'adenite e quindi la linfoangiite non sono rare come pensa Plehn. Noi le abbiamo trovate presenti in tre su quattro dei casi osservati.

MEMORIE DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

M. TRAUBE MENGARINI. *Azione dell'acqua distillata, sola e contenente elettroliti, sul piombo metallico.* Pres. dal Socio P. BLASERNA.

E. M.